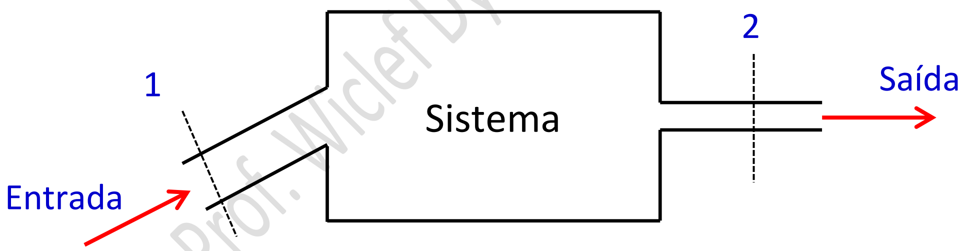
4 - Formulação Integral (Balanços Globais)

Muitos problemas podem ser resolvidos visualizando-se os sistemas (ou processos) pelo lado externo de seu envoltório físico. As variações internas são medidas pelas propriedades das correntes que entram e saem do processo, e pelas variações de energia, sob a forma de calor e trabalho, entre o envoltório e suas vizinhanças.

As equações de balanço contêm termos que consideram as interações do fluido com as superfícies sólidas. O fluido pode exercer forças e torques nas superfícies do sistema e as fronteiras podem realizar trabalho no fluido por meio de superfícies móveis.

4.1 - Balanço Global de Massa

Considere o sistema abaixo:



Vamos fazer duas suposições:

1 - Nos pontos 1 e 2 a velocidade média temporal é perpendicular à seção transversal relevante;

2 - Nos pontos 1 e 2 as propriedades físicas são uniformes ao longo da seção transversal.

A lei de conservação de massa para o sistema:

Taxa de variação de massa	=	Taxa de massa que entra em 1	-	Taxa de massa que sai em 2

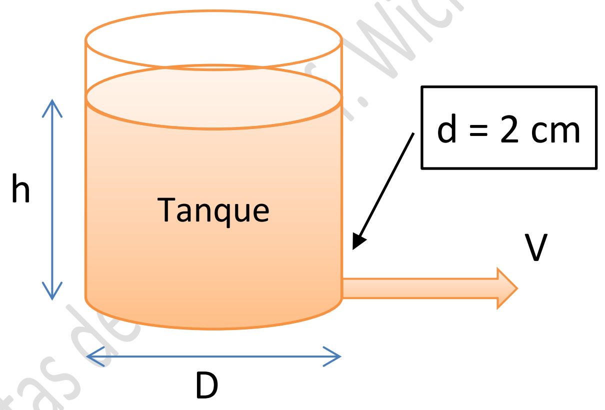
$$\frac{dM}{dt} = \rho_1 \overline{V}_1 A_1 - \rho_2 \overline{V}_2 A_2$$

$M = \int \rho dV$ é a massa total de fluido contida no sistema entre 1 e 2. Podemos reescrever a equação acima:

$$\frac{dM}{dt} = \dot{m}_1 - \dot{m}_2$$

A região sobre a qual se faz o balanço é chamada de "volume de controle".

Ex. - Um tanque cilíndrico com diâmetro de 0,69 m está cheio de água até uma altura de 1,83 m. Um orifício de 2 cm de diâmetro é aberto no fundo do tanque. A velocidade média da água que sai pelo orifício segue a expressão: $\overline{V} = \sqrt{2gh}$, sendo h a altura da água no interior do tanque. Qual o tempo para a altura da água no tanque atingir 0,61 m?



$h_0 = 1{,}83$ m
$D = 0{,}69$ m
$\rho = 1.000$ kg/m^3
$g = 9{,}81$ m/s^2

$$\overline{V} = \sqrt{2gh}$$
$$\dot{m} = \rho \overline{V} A$$

Podemos escrever: $\frac{dM}{dt} = \dot{m}_{entrada} - \dot{m}_{saída}$

$$\dot{m}_{entrada} = 0 \rightarrow \frac{dM}{dt} = -\dot{m}_{saída}$$

$$M=\rho\frac{\pi D^2}{4}h \qquad e \qquad \dot{m}_{saída}=\rho\bar{V}A=\rho\sqrt{2gh}\frac{\pi d^2}{4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\frac{\pi D^2}{4}h\right)=-\rho\sqrt{2gh}\frac{\pi d^2}{4} \quad\rightarrow\quad \cancel{\frac{\pi D^2}{4}}\cancel{\rho}\frac{dh}{dt}=-\cancel{\rho}\sqrt{2g}\cancel{\frac{\pi d^2}{4}}\sqrt{h}$$

$$\frac{dh}{dt}=-\sqrt{2g}\frac{d^2}{D^2}\sqrt{h}=-\sqrt{2g}\left(\frac{d}{D}\right)^2\sqrt{h}$$

$$\frac{dh}{dt}=-\sqrt{2\times 9{,}81}\left(\frac{0{,}02}{0{,}69}\right)^2\sqrt{h}=-0{,}003721\sqrt{h}$$

$$\frac{268{,}74}{\sqrt{h}}dh=-dt \quad\rightarrow\quad 268{,}74\int_{h_0}^{h}\frac{1}{\sqrt{h}}dh=-\int_{t_0}^{t}dt$$

$$268{,}74\left(2\sqrt{h}\Big|_{1{,}83}^{0{,}61}\right)=-(t-t_0) \quad\rightarrow\quad 268{,}74\left[2\left(\sqrt{0{,}61}-\sqrt{1{,}83}\right)\right]=-(t-0)$$

$$t=307{,}3\ s=5{,}1\ min$$

Para sistemas reacionais o enunciado da lei de conservação de massa de uma espécie química A em um sistema multicomponente em escoamento é:

$$\frac{dM_A}{dt}=\dot{m}_{A_{entrada}}-\dot{m}_{A_{saída}}+\dot{r}_A$$

$\dot{r}_A$ = taxa líquida de produção/consumo da espécie A por reações químicas no interior do sistema.

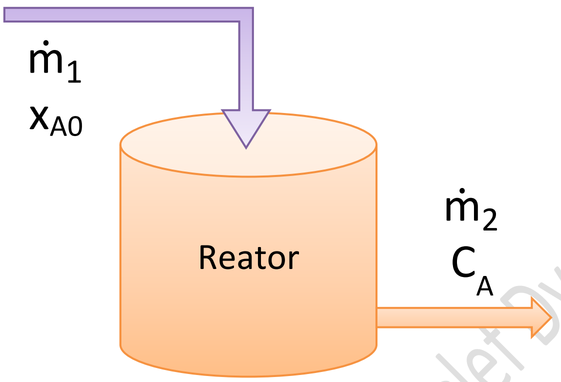
Par um componente da corrente, a fração mássica pode ser escrita:

$$x_i=\frac{\dot{m}_i}{\dot{m}}$$

De uma maneira geral, podemos escrever a equação geral de balanço:

|Saída| = |Entrada| + |Geração| - |Consumo| - |Acúmulo|

Ex. – Uma corrente líquida com vazão mássica constante $\dot{m}_1$ alimenta um reator de volume V_T. Ela contém um resíduo A, com fração mássica x_{Ao}, que é instável e se decompõe de acordo com a reação de 1ª ordem: $\dot{r}_A = -K_1 C_A$. Considerando uniforme a concentração de A no interior do reator (mistura perfeita), determine a concentração C_A do resíduo em sua saída.



$$\dot{r}_A = \frac{\text{massa}}{\text{tempo.volume}}$$

$$K_1 = \frac{1}{\text{tempo}}$$

$$C_A = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$$

Balanço de massa para A no interior do tanque:

$$\frac{dm_A}{dt} = \dot{m}_1 x_{A0} - \dot{m}_2 x_A - K_1 C_A V_T$$

Se o regime é permanente:

$$\frac{dm_A}{dt} = 0$$

$$\dot{m}_1 x_{A0} - \dot{m}_2 x_A - K_1 C_A V_T = 0$$

$$C_A = \frac{m_A}{V_T} = \frac{x_A m}{V_T} = \frac{x_A \rho V_T}{V_T} = x_A \rho \ \rightarrow x_A = \frac{C_A}{\rho}$$

m = massa total no interior do reator;
ρ = densidade da mistura no interior do reator.

$$\dot{m}_1 x_{A0} - \dot{m}_2 \frac{C_A}{\rho} - K_1 C_A V_T = 0$$

$$C_A \left(\frac{\dot{m}_2}{\rho} + K_1 V_T \right) = \dot{m}_1 x_{A0}$$

$$C_A = \frac{\dot{m}_1 x_{A0}}{\left(\frac{\dot{m}_2}{\rho} + K_1 V_T \right)}$$

Assumido: $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$

$$\boxed{C_A = \frac{x_{A0}}{\left(\frac{1}{\rho} + \frac{K_1 V_T}{\dot{m}} \right)}}$$

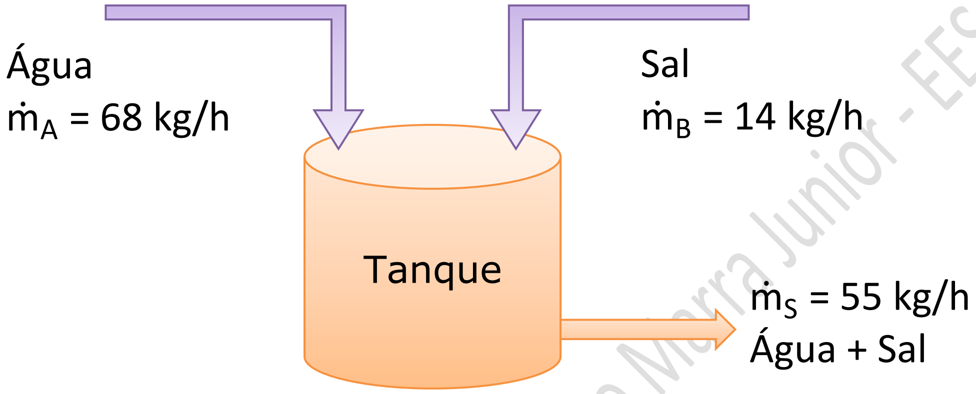
Podemos estimar o volume do reator necessário para se atingir uma concentração de saída desejada:

$$\dot{m}_1 \frac{C_{A0}}{\rho} - \dot{m}_2 \frac{C_A}{\rho} - K_1 C_A V_T = 0$$

$$\dot{m}_1 \frac{C_{A0}}{C_A} - \dot{m}_2 - K_1 \rho V_T = 0$$

$$\boxed{V_T = \frac{\dot{m}}{K_1 \rho} \left(\frac{C_{A0}}{C_A} - 1 \right)}$$

Ex. - Em um determinado instante, uma vazão de água de 68 kg/h e uma vazão de NaCl de 14 kg/h alimentam um tanque agitado. Neste mesmo instante, uma vazão de saída de 55 kg/h deixa o tanque com uma concentração de sal igual a da solução do interior do tanque (mistura perfeita). No início da operação havia 45 kg de água pura no interior do tanque. Estime a concentração do sal C_B de saída após 1 hora de operação.



Balanço de massa para o sal no interior do tanque:

$$\frac{dm_B}{dt}=\dot{m}_B-\dot{m}_S x_B \rightarrow \frac{d(x_B m)}{dt}=\dot{m}_B-\dot{m}_S x_B$$

m = massa total no interior do tanque.

Neste caso o regime é transiente, assim:

$$m\frac{dx_B}{dt}+x_B\frac{dm}{dt}=\dot{m}_B-\dot{m}_S x_B \qquad [1]$$

Balanço global:

$$\frac{dm}{dt}=\dot{m}_A+\dot{m}_B-\dot{m}_S$$

$$\frac{dm}{dt}=68+14-55=27 \rightarrow \frac{dm}{dt}=27 \text{ kg/h}$$

Podemos encontrar uma expressão que nos forneça a massa no interior do tanque em qualquer tempo pela integração da equação acima:

$$\int_{m_0}^{m} dm = \int_{t_0}^{t} 27\,dt$$

m_0 = massa inicial no interior do tanque;
t_0 = tempo inicial do processo.

$$\int_{45}^{m} dm = \int_{0}^{t} 27\,dt \rightarrow (m-45)=27(t-0)$$

$$m=27t+45 \qquad [2]$$

Vamos voltar para a equação 1:

$$(27t+45)\frac{dx_B}{dt} + x_B(27)=\dot{m}_B-\dot{m}_S x_B \rightarrow (27t+45)\frac{dx_B}{dt} + x_B(27)=14-55x_B$$

$$(27t+45)\frac{dx_B}{dt} =14-82x_B$$

Separando as variáveis e integrando:

$$\int_{0}^{x_B} \frac{dx_B}{(14-82x_B)} = \int_{0}^{t} \frac{dt}{(27t+45)}$$

$$\frac{1}{-82}\ln(14-82x_B)\Big|_0^{x_B}=\frac{1}{27}\ln(27t+45)\Big|_0^t$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{(a+bx)} = \frac{1}{b}ln(a+bx)}$$

$$\ln(14-82x_B)-\ln(14)=-\frac{82}{27}\left[\ln(27t+45)-\ln(45)\right]$$

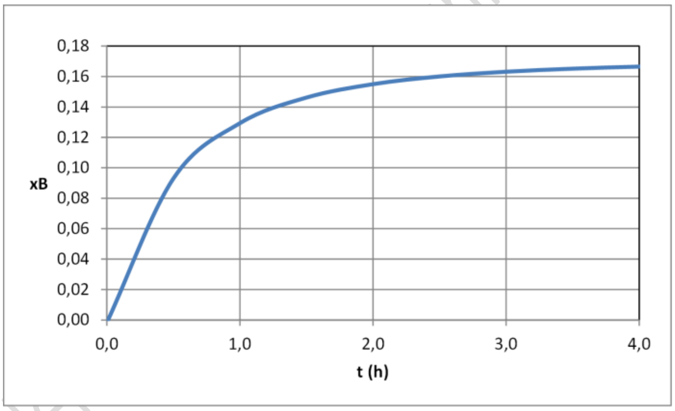
$$\ln(14\text{-}82x_B)\text{-}2{,}64=-\frac{82}{27}[\ln(27t+45)\text{-}3{,}81]$$

$$\ln(14\text{-}82x_B)=14{,}21\text{-}\frac{82}{27}\ln(27t+45)$$

$$14\text{-}82x_B=\exp\left[14{,}21\text{-}\frac{82}{27}\ln(27t+45)\right]$$

$$\boxed{x_B=\frac{1}{82}\left\{14\text{-}\exp\left[14{,}21\text{-}\frac{82}{27}\ln(27t+45)\right]\right\}}$$

t (h)	x_B
0,0	0,0
0,5	0,093
1,0	0,129
1,5	0,146
2,0	0,155
3,0	0,163
4,0	0,167

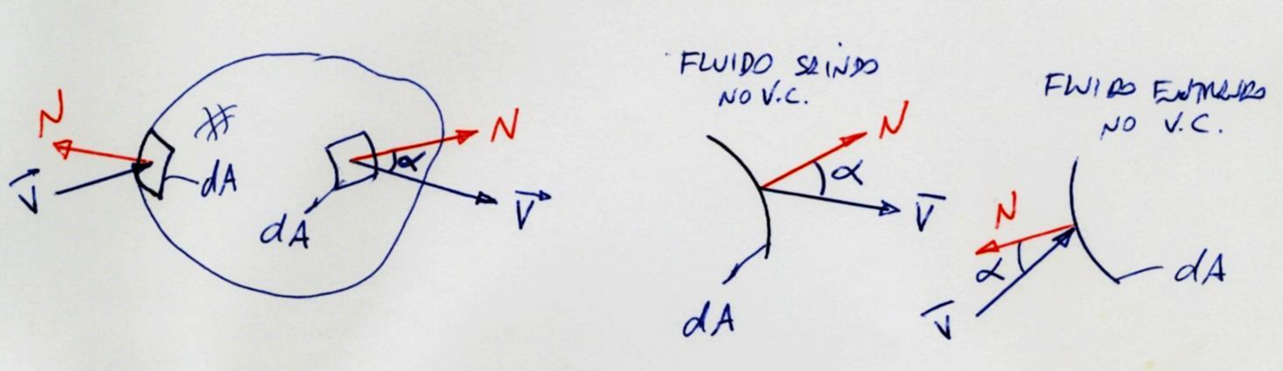


Para 1 h: x_B = 0,129

$$x_B=\frac{C_B}{\rho}\rightarrow C_B=x_B\rho$$

Se assumirmos que para uma fração mássica de 0,129 a densidade da solução salina é igual a da água pura (1.000 kg/m^3):
C_B = 129 kg/m^3

Aplicaremos agora o princípio da conservação da massa a um envoltório hipotético fixo no espaço e chamaremos o espaço envolvido de “volume de controle” e seus limites de “superfície de controle”. Definimos α como o ângulo entre a linha normal à superfície, dirigida para fora, e a linha que representa a direção da velocidade no ponto considerado.



O fluxo de massa através do "volume de controle" se torna:

$$\iint_{S.C.} V\rho\cos\alpha dA \rightarrow \text{(saída-entrada)}$$

Para velocidade V paralela à superfície → $\alpha = 90^o \rightarrow \cos\alpha = 0$
Para V dirigida para dentro → $\alpha > 90^o \rightarrow \cos\alpha < 0$
Para V dirigida para fora → $\alpha < 90^o \rightarrow \cos\alpha > 0$

O acúmulo (variação) de massa no interior do volume de controle:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_{Vol} \rho dVol$$

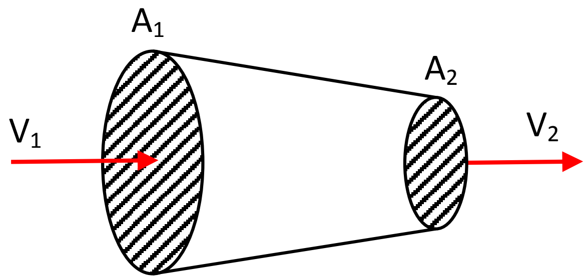
Portanto, o balanço global de massa na forma geral:

$$\iint_{S.C.} V\rho\cos\alpha dA + \frac{d}{dt}\iiint_{Vol} \rho dVol = 0$$

(Sai – Entra) + Acúmulo = 0

cosα varia de -1 a 1 cobrindo toda a superfície de controle

A aplicação da equação acima se torna mais clara quando escrita para a maioria das situações nas quais o fluxo para dentro é normal à uma área A1 e todo fluxo para fora é normal à uma área A2, sendo o escoamento paralelo às outras partes da superfícies de controle, como, por exemplo, no escoamento no interior de um conduto:



Temos que:

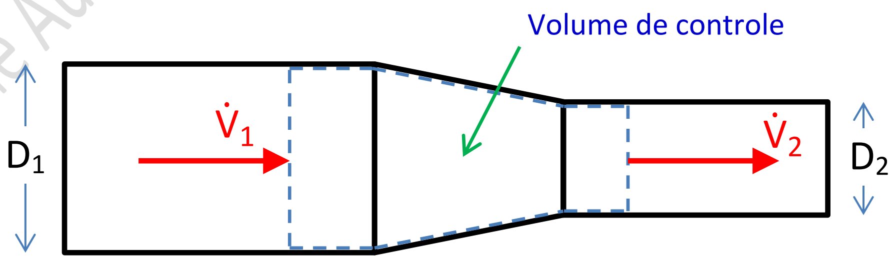
$$\bar{V} = \frac{1}{A} \iint_A V dA$$

Para ρ = cte. $\rightarrow$ $$\rho \iint_{A_2} V_2 dA_2 - \rho \iint_{A_1} V_1 dA_1 + \frac{dM}{dt} = 0$$

Mas, $$\iint_A V dA = \bar{V}A \quad \rightarrow \quad \rho\bar{V}_2 A_2 - \rho\bar{V}_1 A_1 + \frac{dM}{dt} = 0$$

Como, $\dot{m} = \rho\dot{V}A$ $\rightarrow$ $$\boxed{\dot{m}_2 - \dot{m}_2 + \frac{dM}{dt} = 0}$$

Ex. – Calcular a velocidade média nos trechos 1 e 2, e verificar o regime do escoamento.



Dados: D_1= 1 m; D_2= 0,5 m; $\dot{V}_1$= 0,1 m^3/s; ρ= 1 g/cm^3; μ= 1 g/cm.s [poise]. O fluido é incompressível.

Vamos converter as unidades da densidade e da viscosidade do fluido para o SI:

$$\rho = 1\left(\frac{g}{cm^3}\right)\left(\frac{100\ cm}{1\ m}\right)^3\left(\frac{1\ kg}{1000\ g}\right) = 1.000\ kg/m^3$$

$$\mu = 1\left(\frac{g}{cm\ s}\right)\left(\frac{100\ cm}{1\ m}\right)\left(\frac{1\ kg}{1000\ g}\right) = 0{,}1\ kg/m\ s$$

Balanço Global de Massa:

$$\frac{dM}{dt} = \dot{m}_1 - \dot{m}_2 \quad \rightarrow \quad \text{Regime Permanente} \quad \rightarrow \quad \frac{dM}{dt} = 0$$

Fluido incompressível: $\rho_1 = \rho_2$

Portanto: $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \quad \rightarrow \quad \rho_1\overline{V}_1A_1 = \rho_2\overline{V}_2A_2 \quad \rightarrow \quad \overline{V}_1A_1 = \overline{V}_2A_2$

$$\overline{V}_1\frac{\pi D_1^2}{4} = \overline{V}_2\frac{\pi D_2^2}{4} \quad \rightarrow \quad \boxed{\overline{V}_1D_1^2 = \overline{V}_2D_2^2}$$

$$\overline{V}_1 = \frac{\dot{V}_1}{A_1} \quad \rightarrow \quad \overline{V}_1 = \frac{0{,}1}{\pi(1^2)} \times 4 = 0{,}127\ m/s$$

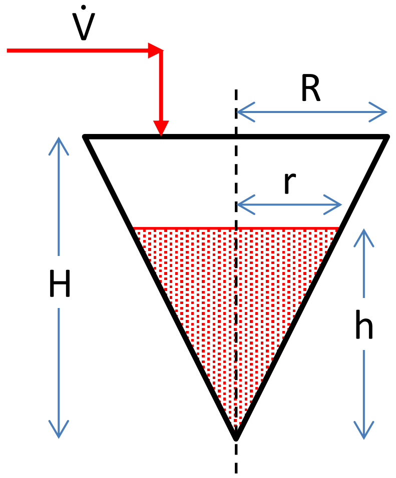
$$\overline{V}_2 = \overline{V}_1\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = 0{,}127\left(\frac{1}{0{,}5}\right)^2 = 0{,}508\ m/s$$

Vamos calcular o número de Reynolds do escoamento em cada trecho da tubulação:

$Re = \frac{\rho\overline{V}D}{\mu}$	Trecho 1	$Re = \frac{1.000 \times 0{,}127 \times 1}{0{,}1} = 1.270$ $Re < 2.000 \rightarrow$ Regime laminar

	Trecho 2	$Re = \frac{1.000 \times 0{,}508 \times 0{,}5}{0{,}1} = 2.540$ $2.000 < Re < 4.000 \rightarrow$ Regime de transição

Ex. – Um reservatório em forma de cone circular reto, com a base para cima, é alimentado com benzeno (ρ = 0,879 g/cm^3). Como a altura do líquido, h, varia com o tempo? Qual o tempo total de enchimento. O cone tem altura de 4 m e sua base tem raio de 1 m. A vazão de alimentação é de 600 L/h.



$$\text{Volume do cone} = \frac{\text{área da base x altura}}{3}$$

O volume de líquido:

$$Vol = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Balanço Global de Massa:

$$\frac{dM}{dt} = \dot{m}_{entrada} - \dot{m}_{saída} \quad \rightarrow \quad \frac{dM}{dt} = \dot{m}_{entrada} = \rho \dot{V}$$

$$M = \rho Vol = \rho \pi r^2 h/3$$

$$\frac{\rho \pi}{3} \frac{d(r^2 h)}{dt} = \rho \dot{V}$$

Vemos que, tanto “r” quanto “h” variam com o tempo. Se conseguirmos uma relação entre esses dois parâmetros poderemos deixar a expressão acima apenas como função de um deles. Ao observarmos a figura acima, por semelhança de triângulos temos:

$$\frac{R}{r}=\frac{H}{h} \quad \rightarrow \quad r=h\frac{R}{H}$$

Assim:

$$\frac{\rho\pi}{3}\frac{d\left(\left(h\frac{R}{H}\right)^2 h\right)}{dt}=\rho\dot{V} \quad \rightarrow \quad \frac{\rho\pi R^2}{3H^2}\frac{dh^3}{dt}=\rho\dot{V}$$

$$\frac{dh^3}{dt}=\frac{3\dot{V}}{\pi}\left(\frac{H}{R}\right)^2 \quad \rightarrow \quad dh^3=\frac{3\dot{V}}{\pi}\left(\frac{H}{R}\right)^2 dt$$

$$\int_0^h dh^3=\frac{3\dot{V}}{\pi}\left(\frac{H}{R}\right)^2\int_0^t dt \quad \rightarrow \quad h^3=\frac{3\dot{V}}{\pi}\left(\frac{H}{R}\right)^2 t$$

$$h=\left[\frac{3\dot{V}}{\pi}\left(\frac{H}{R}\right)^2\right]^{1/3}(t)^{1/3}$$

$$\dot{V}=600\ L/h=0{,}6\ m^3/h=0{,}01\ L/min$$

$$h=\left[\frac{3x0{,}01}{\pi}\left(\frac{4}{1}\right)^2\right]^{1/3}(t)^{1/3}=0{,}5346\ (t)^{1/3}$$

Na expressão acima, h ≡ [m] e t ≡ [min]. O tempo total de enchimento: h = H = 4 m.

$$t\approx 419\ min\approx 7\ h$$