2 - Estática dos Fluidos

Um fluido é uma substância que se deforma continuamente quando submetido a uma tensão de cisalhamento (forças tangenciais superficiais). Uma tensão normal é denominada de pressão. Um fluido estático é aquele que está em repouso ou que possui velocidade constante, com aceleração zero.

As forças que atuam em sistemas fluidos são as superficiais e as volumétricas (ou de campo). A força volumétrica é proporcional à massa do sistema (o peso, por exemplo).

As forças superficiais são dadas em termos de componentes tangenciais (forças de cisalhamento ou atrito) e normais (forças de pressão) à superfície em questão. No equilíbrio estático as únicas forças que atuarão serão as normais de superfície e volumétrica.

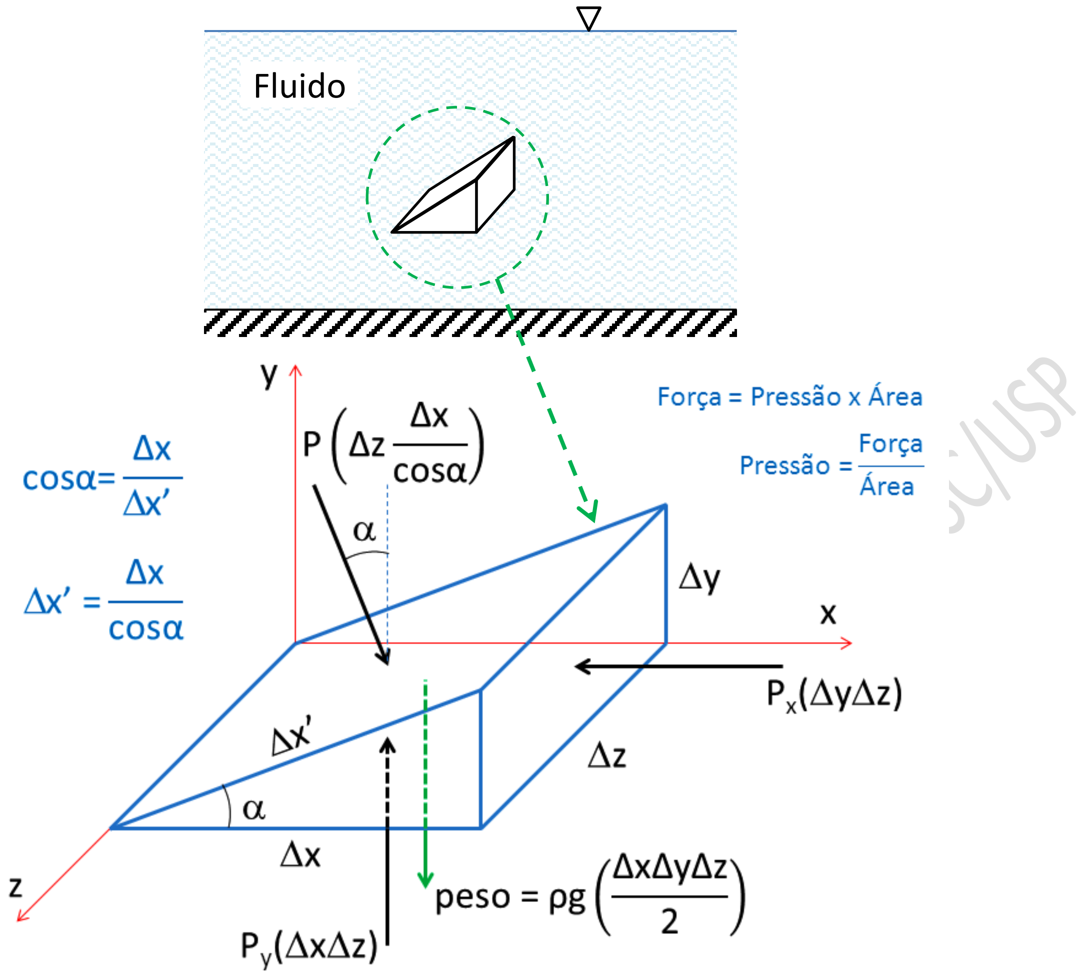
2.1 - Pressão num Ponto

Lei de Pascal: a pressão num ponto em um fluido estático, ou em movimento onde as tensões de cisalhamento não existem, é independente da direção.

Considere um pequeno elemento de fluido em forma de uma cunha. As forças na direção *z* são iguais e opostas e não estão representadas.

A hipótese de que as tensões de cisalhamento são nulas será adequada enquanto o movimento do fluido for igual a de um corpo rígido, ou seja, aquele em que o movimento relativo entre partes adjacentes do fluido não existe.

Considerando que P, P_x e P_y são as pressões médias nas superfícies da cunha, e somando as forças nas direções x e y, teremos:



Direção x: $P_x(\Delta y \Delta z) = P(\Delta x \Delta z)\left(\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}\right)$

Temos que: $\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Assim, $P_x(\Delta y \Delta z) = P(\Delta x \Delta z)\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \rightarrow \boxed{P_x = P}$

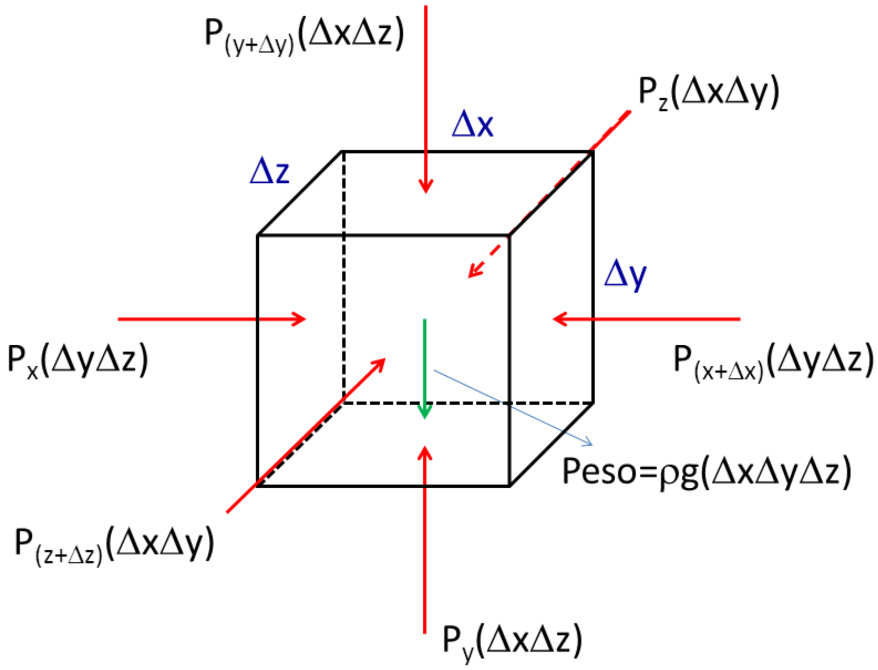
Direção y: $P_y(\Delta x \Delta z) = P\left(\frac{\Delta x \Delta z}{\cos \alpha}\right)\cos \alpha + \rho g\left(\frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{2}\right)$

$$P_y(\Delta x \Delta z) = P(\Delta x \Delta z) + \rho g\left(\frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{2}\right) \rightarrow \boxed{P_y = P + \rho g\left(\frac{\Delta y}{2}\right)}$$

Quando Δx, Δy e Δz tendem a zero, ou seja, o elemento de fluido se transforma em um ponto, teremos: $\boxed{P_y = P}$. De modo generalizado: $\boxed{P_x = P_y = P_z = P}$, ou seja, a pressão num ponto do fluido é independente da direção.

2.2 - Variação da Pressão num Fluido em Repouso

Como varia, ponto a ponto, a pressão numa certa quantidade de fluido em repouso? Considere o elemento de fluido a seguir, no qual atuam as forças de pressão e o peso.



Somando as forças nas direções x, y e x:

Direção x: $P_x(\Delta y \Delta z) - P_{(x+\Delta x)}(\Delta y \Delta z) = 0$

Direção y: $P_y(\Delta x \Delta z) - P_{(y+\Delta y)}(\Delta x \Delta z) - \rho g(\Delta x \Delta y \Delta z) = 0$

Direção z: $P_z(\Delta x \Delta y) - P_{(z+\Delta z)}(\Delta x \Delta y) = 0$

Dividindo-se as expressões acima por $\Delta x \Delta y \Delta z$ e tomando o limite para Δx, Δy, Δz tendendo a zero, teremos:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{P_x - P_{x+\Delta x}}{\Delta x}\right) = -\frac{\delta P_x}{\delta x} = 0$$

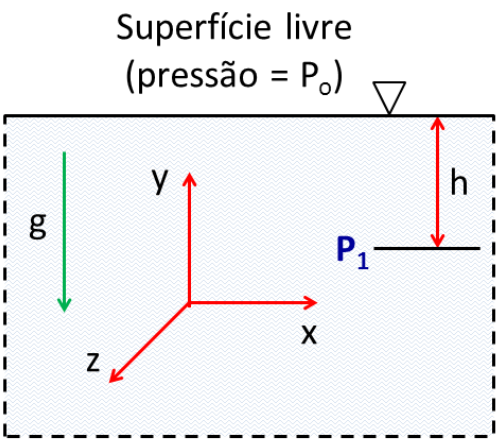
$$\lim_{\Delta y \to 0}\left(\frac{P_y - P_{y+\Delta y}}{\Delta y} - \rho g\right) = -\frac{\delta P_y}{\delta y} - \rho g = 0$$

$$\lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{P_z - P_{z+\Delta z}}{\Delta z}\right) = -\frac{\delta P_z}{\delta z} = 0$$

Observa-se que a pressão não é função de *x* e *z*, ou seja, em um meio homogêneo a pressão em um mesmo plano horizontal é constante. Portanto, a pressão é apenas função de *y*, daí podemos reescrever a expressão anterior em termos da derivada ordinária e, de acordo com a Lei de Pascal: $P_x = P_y = P_z = P$ temos:

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g$$

Se o fluido for incompressível (ρ = cte) e para variações de g desprezíveis, podemos integrar a expressão acima:



$$\int_{P_o}^{P1} dP = -\rho g \int_{y_o}^{y_1} dy$$

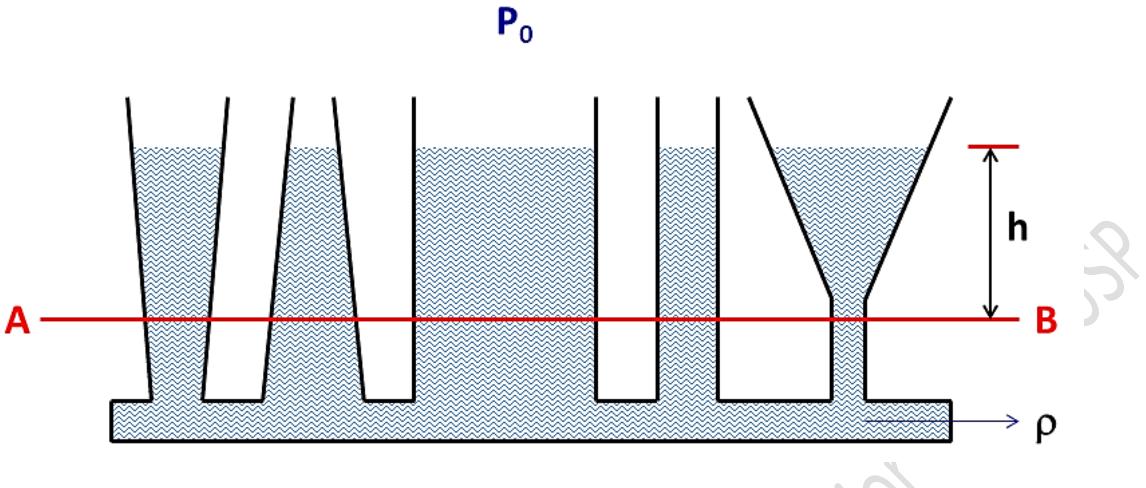
$$P_1 - P_o = -\rho g(y_1 - y_o)$$

O índice "o" indica um nível de referência.

Se a superfície do fluido for tomada como referência:

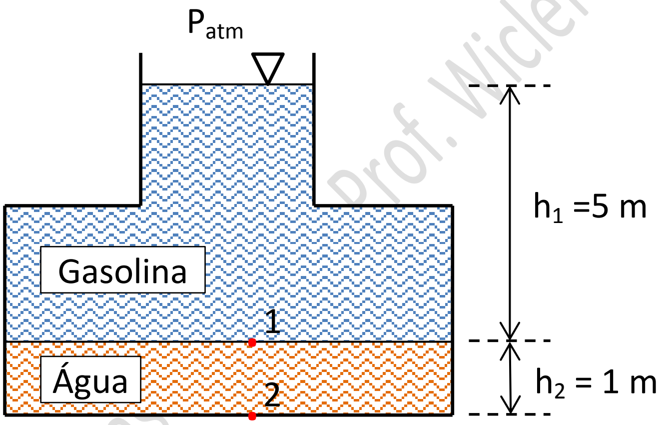
$$\boxed{P_1 = P_o + \rho g h} \qquad h = y_o - y_1$$

Portanto, a distribuição de pressão em um fluido homogêneo, incompressível e em repouso é função apenas da profundidade do fluido (em relação a um plano de referência) e não é influenciada pelo tamanho ou forma do recipiente que contém o fluido.



A pressão é a mesma em todos os pontos da linha $\overline{AB}$, dependendo apenas de h, P_o e ρ.

Ex. - Determine a pressão na interface gasolina-água e no fundo do tanque. A densidade da gasolina é 0,68.



$$P = P_o + \rho g h$$

$$P_1 = P_{atm} + \rho_{gas} g h_1$$

$$P_2 = P_1 + \rho_{agua} g h_2$$

Assumindo:
P_{atm} = 1 atm = 101.325 N/m^2
ρ_{agua} = 1.000 kg/m^3

A densidade da gasolina é dada por:

$$\rho_{gas} = 0{,}68 \times 10000 = 680 \text{ kg/m}^3$$

P_1 = 101.325 + 680 x 9,81 x 5 = 134.679 N/m^2 = 1,33 atm

P_2 = 134.679 + 1.000 x 9,81 x 1 = 144.489 N/m^2 = 1,43 atm

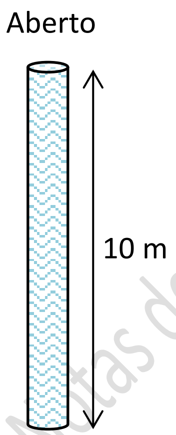
Ex. - Determine a pressão abaixo da superfície do mar, em profundidades de 10, 20 e 30 m. Densidade média da água do mar de 1.025 kg/m^3. P_{atm} = 1 atm.

$$P = P_o + \rho g h$$

Profundidade (m)	Pressão (N/m^2)	Pressão (atm)
10	101.325 + 1.025 x 9,81 x 10 = 201.878	2,0
20	101.325 + 1.025 x 9,81 x 20 = 302.430	3,0
30	101.325 + 1.025 x 9,81 x 30 = 402.982	4,0

Como se vê, a cada 10 m de aumento na profundidade, há um aumento de 1 atm na pressão.

Ex. - Um tubo vertical aberto para o ambiente de 10 cm de diâmetro e 10 m de altura está cheio de água. Qual a força exercida na base do tubo? P_{atm} = 1 atm. ρ_{agua} = 1.025 kg/m^3.



$$P = P_o + \rho g h$$

Mesma pressão a 10 m abaixo da superfície do mar!

Na base do tubo:

P = 101.325 + 1.025 x 9,81 x 10 = 201.878 N/m^2

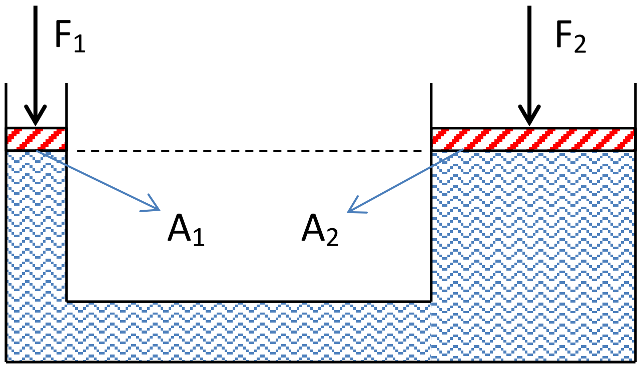
Pressão = Força/Área $\rightarrow$ Força = Pressão x Área

Área = $\pi R^2 = \pi(0{,}10/2)^2 = 7{,}85\times10^{-3}$ m^2

Força = $7{,}85\times10^{-3}$ x 201.878 = 1.585 N

Essa força é equivalente à força peso de uma massa de 162 kg.

O fato de a pressão ser a mesma em um plano com mesma elevação é fundamental para a operação de dispositivos hidráulicos como macacos, elevadores e presas.



As pressões que atuam nas faces dos pistões são as mesmas.

$$P_1 = P_2$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Se $A_2 = 10\ A_1 \rightarrow \boxed{F_2 = 10\ F_1}$

Isso significa que uma força aplicada no pistão com menor diâmetro pode se contrapor a uma força maior aplicada no pistão de maior diâmetro.

2.3 - Fluido Compressível

Como simplificação, admite-se que os fluidos sejam incompressíveis, ou seja, seu volume não se altera quando submetidos à ação da pressão. De fato, todos os fluidos são mais ou menos compressíveis, dependendo do seu "módulo de compressibilidade volumétrica (ε)":

$$\varepsilon = \frac{1}{\beta} = -V\frac{dP}{dV} \rightarrow \beta \equiv \frac{-1}{V}\left(\frac{\delta V}{\delta P}\right)_T$$

β = compressibilidade isotérmica.

O sinal negativo indica que um aumento de pressão sobre um volume de fluido implica diminuição desse volume.

Normalmente, modelamos os gases como fluidos compressíveis porque suas densidades variam com a pressão e a temperatura. Para líquidos, usualmente, a idealização de "fluido incompressível" é mais utilizada, pois alterações da densidade com a pressão são moderadas.

Para os gases considerados ideais, a relação entre densidade, temperatura e pressão pode ser obtida da relação:

$$PV = nRT$$

R = uma constante;
P = pressão absoluta;
T = temperatura absoluta.

Ao estudarmos processos de transferência no ar, devemos lembra que o ar e uma mistura gasosa, que para fins práticos de engenharia possui a composição molar: 79% N_2 e 21% O_2.

Para uniformizar suas propriedades, podemos adotar a "atmosfera padrão":

Pressão (P) = 760 mmHg = 101,325 kPa
Temperatura (T) = 15 ^{o}C = 288,15 K
Densidade (ρ) = 1,223 kg/m^3
Viscosidade (μ) = 1,77 x 10^{-5} N.s/m^2
Peso específico (γ) = ρg = 11,99 N/m^3
g = 9,81 m/s^2

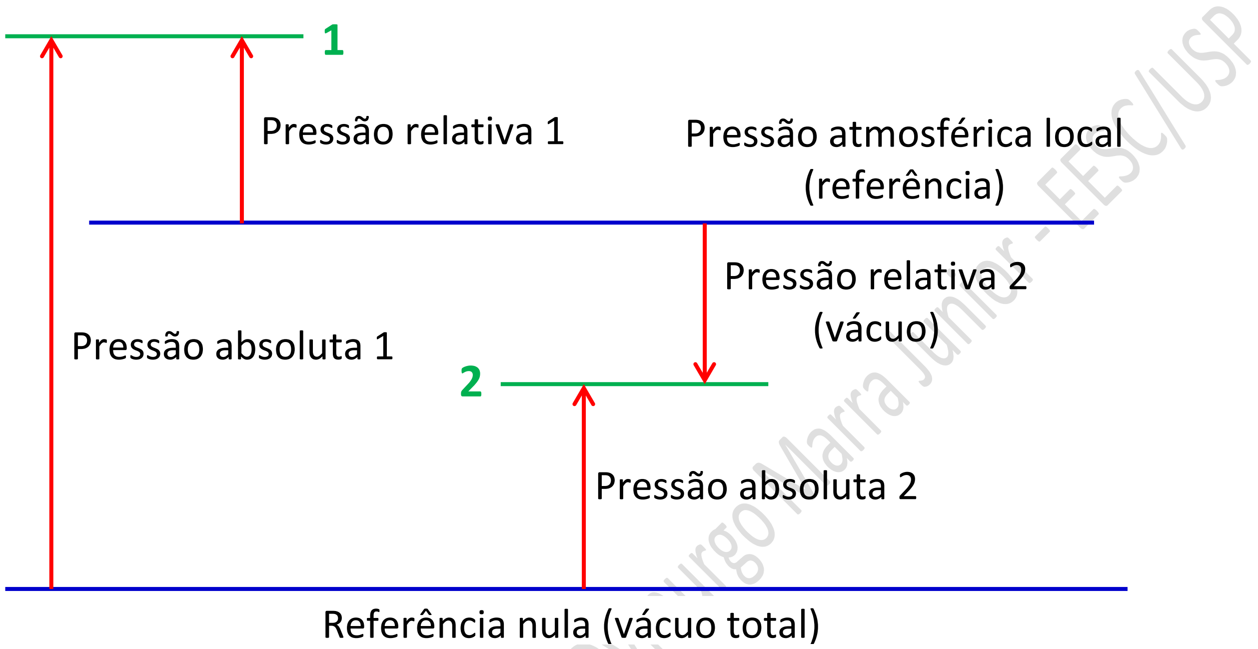
2.4 - Medições de Pressão

Fluidos em escoamento produzem alterações de pressão ao longo de seu deslocamento. A pressão é uma importante característica do escoamento, assim, numerosos dispositivos e técnicas são utilizados para sua medição.

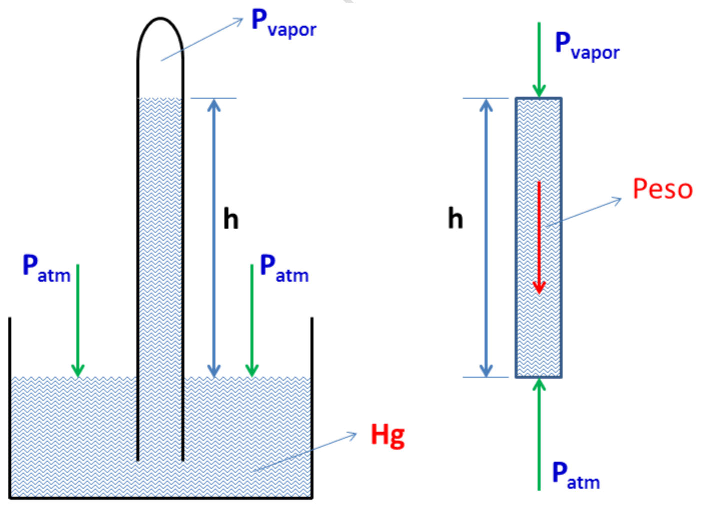
Devemos considerar que a pressão em um ponto do sistema fluido pode ser designada em termos absolutos ou relativos, ou seja, as pressões medidas podem ser absolutas ou relativas.

A pressão absoluta é medida em relação ao vácuo perfeito (pressão absoluta nula) e a pressão relativa é medida em relação à pressão atmosférica ou ambiente local.

A pressão absoluta é sempre positiva e a pressão relativa pode ser positiva ou negativa (vácuo parcial).



A medição da pressão atmosférica é realizada com o barômetro de mercúrio: pressão barométrica.



Balanço de forças:

$$A \times P_{atm} = Peso + A \times P_{vapor}$$

P_{vapor} = pressão de vapor do Hg (mercúrio)

$$Peso = Ah\rho_{Hg}g$$

$$P_{atm} = h\rho_{Hg}g + P_{vapor}$$

A pressão de vapor do Hg (20 °C) é de 0,16 N/m^2, podendo ser desprezada:

$$P_{atm} = h\rho_{Hg}g$$

Pressão atmosférica padrão = 76 cmHg = 760 mmHg = 760 Torr

$$P_{atm} = 1 \text{ atm} = 101.325 \text{ Pa} = 1{,}01325 \text{ bar} = 14{,}696 \text{ psi}$$

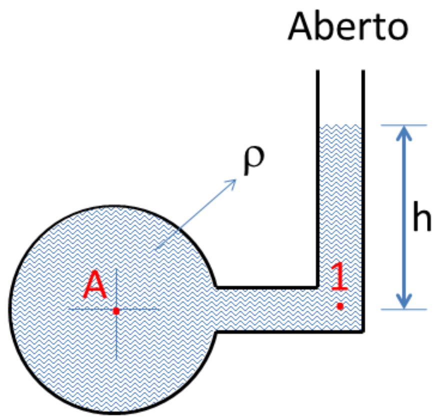
Note que "cmHg" não é uma unidade usual de pressão. Na realidade é uma unidade de comprimento, ou seja, é a altura de uma coluna de mercúrio que se contrapõem à P_{atm}.

A invenção do barômetro é atribuída a Evangelista Torricelli (1644).

2.5 - Manometria

Uma técnica padrão para a medição da pressão envolve a utilização de colunas de líquidos verticais ou inclinadas: manômetros.

Tubo Piezométrico: o tipo mais simples de manômetro. Utilizado para líquidos.



$$P_A = P_1$$

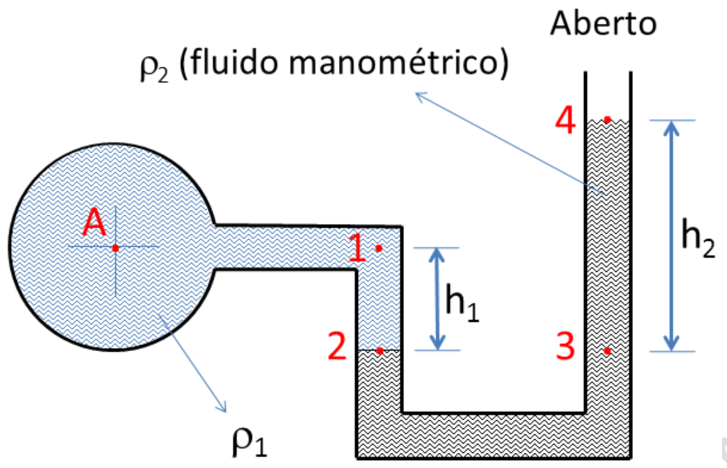
$$P_1 = \rho gh + P_{atm}$$

$\gamma = \rho g$ (peso específico)

$P_A = \gamma h$ (pressão relativa)

$P_A = \gamma h + P_{atm}$ (pressão absoluta)

Manômetro de Tubo em "U": a maior vantagem deste tipo de manômetro é que o fluido manométrico pode ser diferente do fluido no recipiente, podendo ser utilizado para medidas em recipientes contendo gases ou líquidos.



$P_A = P_1$

$P_2 = P_3$

$P_4 = P_{atm}$

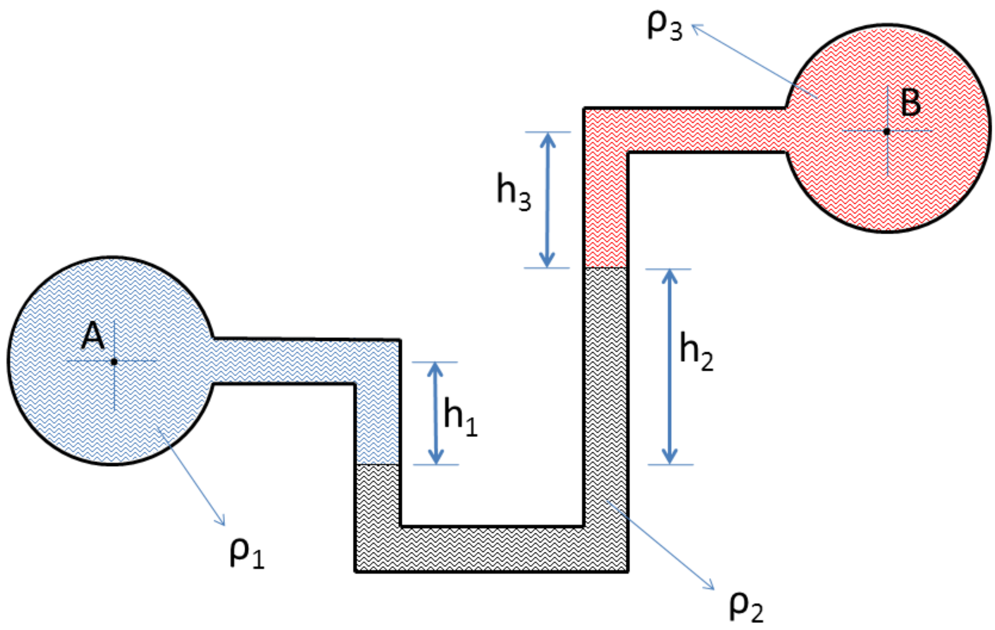
$$P_2 = \rho_1 g h_1 + P_A \qquad e \qquad P_3 = \rho_2 g h_2 + P_{atm}$$

$$P_2 = P_3 \rightarrow \rho_1 g h_1 + P_A = \rho_2 g h_2 + P_{atm}$$
$$P_A = \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1 + P_{atm}$$

Se o recipiente contém um gás, o termo "$\rho_1 g h_1$" normalmente pode ser desprezado, pois a densidade dos gases é muito menor que a densidade dos líquidos, assim:

$$P_A = \rho_2 g h_2 + P_{atm}$$

Manômetro Diferencial em "U": utilizado para medir a diferença de pressões entre dois sistemas.



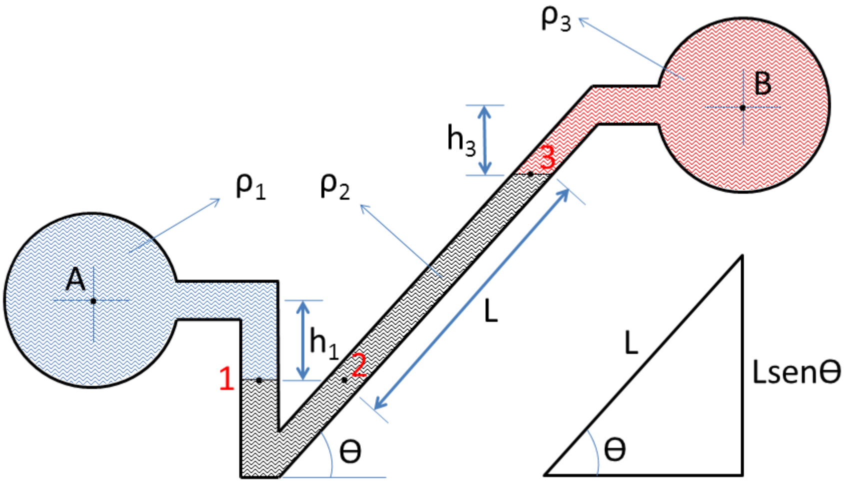
$$P_A - P_B = \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3 - \gamma_1 h_1$$

$$\text{Entre dois sistemas gasosos} \rightarrow P_A - P_B = \gamma_2 h_2$$

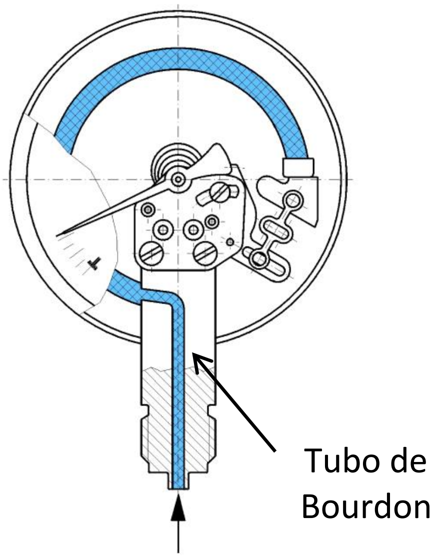
Manômetro com Tubo Inclinado: utilizado para medição de pequenas variações de pressão.

$$P_1 = P_2$$

$$P_A - P_B = \gamma_2 L\,\text{sen}\Theta + \gamma_3 h_3 - \gamma_1 h_1$$



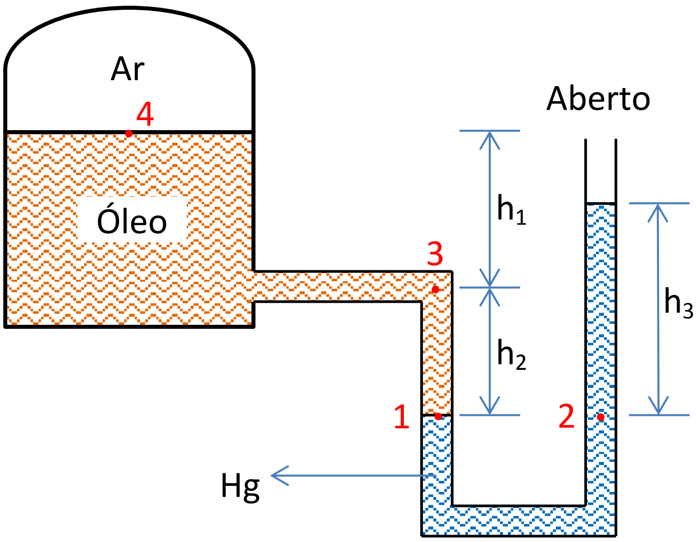
Outro tipo comum de instrumento para medida de pressão é o manômetro de Bourdon, que normalmente (mas não sempre) indica pressão zero quando aberto para a atmosfera. O dispositivo sensível à pressão é um fino tubo metálico em forma de arco fechado em uma das extremidades.



O tipo de instrumento usado para a medição determina se a pressão medida é absoluta ou relativa.

Pressão Absoluta	**=**	**Pressão Manométrica (Relativa)**	**+**	**Pressão Barométrica (Ambiente)**

Ex. - Um tanque fechado contém ar comprimido e óleo com densidade de 0,9. Determine a pressão do ar no tanque se h_1= 914 mm; h_2= 152 mm e h_3= 229 mm. O fluido manométrico é mercúrio (ρ_{Hg}= 13,6 g/cm^3). Veja o esquema.



h_1 = 914 mm = 0,914 m
h_2 = 152 mm = 0,152 m
h_3 = 229 mm = 0,229 m

ρ_{Hg} = 13.600 kg/m^3
ρ_{oleo} = 900 kg/m^3

P_{atm} = 101.325 N/m^2 (Pa)
g = 9,81 m/s^2

Temos: $P_1 = P_2$ e $P_4 = P_{Ar}$

$P_1 = \rho_{oleo}(h_1 + h_2)g + P_{Ar}$
$P_2 = \rho_{Hg}h_3g + P_{atm}$

$$\rho_{oleo}(h_1 + h_2)g + P_{Ar} = \rho_{Hg}h_3g + P_{atm}$$

$$P_{Ar} = \rho_{Hg}h_3g - \rho_{oleo}(h_1 + h_2)g + P_{atm}$$

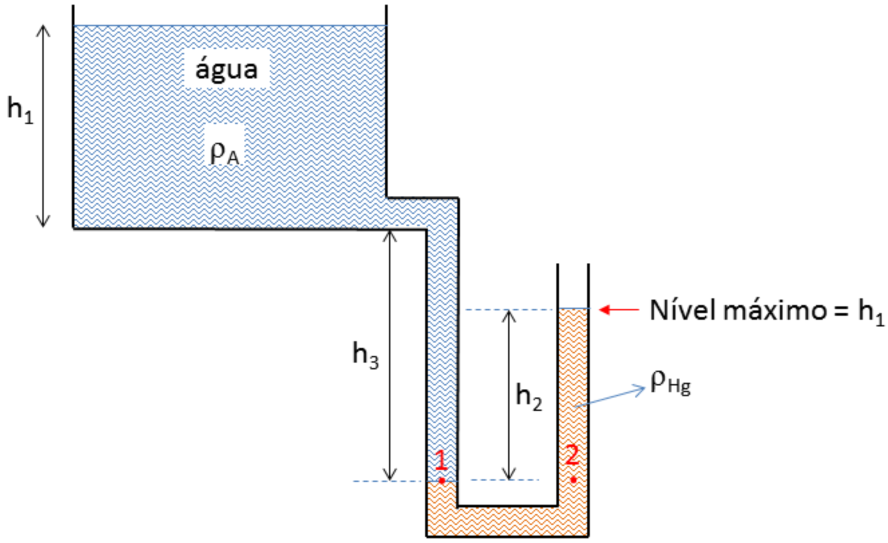
P_{Ar} = 13.600 x 0,229 x 9,81 - 900(0,914 + 0,152)9,81 + 101.325

P_{Ar} = 30.552 - 9.412 + 101.325 = 122.465 Pa

Ex. - Um manômetro de tubo em "U" é usado para a medida do nível da água de um tanque. Quando o tanque está completamente cheio: h_1 = 2,5 m e h_3 = 3 m. Qual o valor de h_2 nesta situação? Se o tanque estiver vazio (h_1 = 0), qual será o valor de h_2? O fluido manométrico é mercúrio. Veja a figura.

Para o tanque cheio:

$$P_1 = P_2 \rightarrow \rho_A(h_3 + h_1)g + P_{atm} = \rho_{Hg}h_2g + P_{atm}$$



$$\rho_A(h_3 + h_1)g = \rho_{Hg}h_2g \quad \rightarrow \quad h_2 = \rho_A(h_3 + h_1)/\rho_{Hg}$$

$$h_2 = 1.000(3 + 2,5)/13.600 \quad \rightarrow \quad h_2 = 0,404 \text{ m} = 40,4 \text{ cm}$$

Para o tanque vazio:

A variação da pressão: $\Delta P = \rho_A h_1 g = 1000 \times 2,5 \times 9,8 = 24.500$ Pa

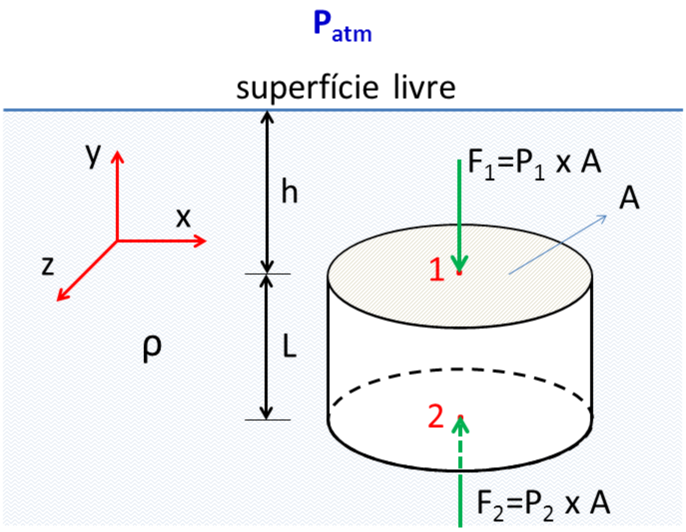
A nova pressão P_2 será reduzida em 24.500 Pa, assim:
$P_2 = \rho_{Hg}h_2g + P_{atm} - 24.500 = 13.600 \times 0,404 \times 9,8 + 101.325 - 24.500 = 155.170 - 24.500 = 130.670$ Pa

Assim, a nova altura h_2 será:

$$h_2 = (130.670 - 101325)/(13.600 \text{ X } 9,8) = 0,22 \text{ m} = 22 \text{ cm}$$

2.6 - Flutuação

A força de empuxo que age sobre um corpo que está submerso ou flutuando em um fluido estático é a força vertical resultante da distribuição das pressões exercidas pelo fluido sobre o corpo. Considere o corpo da figura abaixo:



$P_2 = \rho g(L + h) + P_{atm}$

$F_2 = P_2 \times A$

$P_1 = \rho gh + P_{atm}$

$F_1 = P_1 \times A$

Empuxo (E) = $F_2 - F_1$

$$E = [\rho g(L + h) + P_{atm}]A - (\rho gh + P_{atm})A$$

$E = \rho gLA = \rho gV_{ol}$ (V_{ol} = volume do corpo submerso)

A força de empuxo é igual ao peso do fluido deslocado, conhecido como princípio de Arquimedes.

Ex. Uma esfera de isopor de volume de 0,4 L e massa de 120 g flutua sobre a água. Qual o volume emerso da esfera?

Peso da esfera = Empuxo

$$m_{esfera}g = \rho_{água}gV_{ol} \rightarrow V_{ol} = m_{esfera}/\rho_{água}$$

Assumindo que a densidade da água é de 1.000 g/L.

V_{ol} = 120/1.000 = 0,12 L (este é o volume submerso!!!)

Portanto, o volume emerso é de 0,28 L