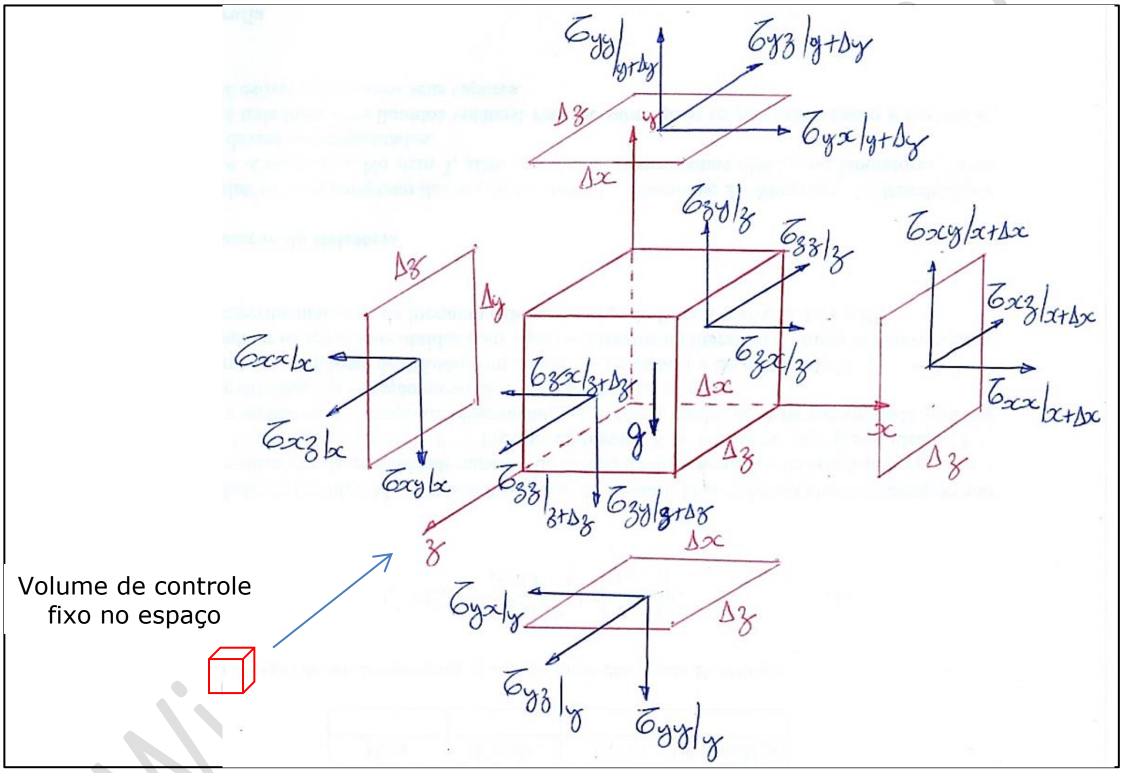
# 3 - Equação de Conservação da Quantidade de Movimento

Procuramos, basicamente, uma equação que descreva a distribuição de velocidades de um fluido, em função do tempo e da posição. A obtenção das equações do movimento dos fluidos é baseada no princípio da conservação da massa e na aplicação da segunda lei do movimento de Newton em um volume infinitesimal fixo no espaço, através do qual um fluido escoa. Considere um volume de controle diferencial de dimensões ΔxΔyΔz.




Devemos considerar dois tipos de forças que atuam no elemento fluido: as forças superficiais e as forças de campo. As forças superficiais são resultado da interação do elemento com o meio circundante, e podem ser tangenciais ou normais. São resultado da ação da pressão e dos efeitos viscosos. As forças de campo são resultado do campo gravitacional ou eletromagnético.

As forças superficiais darão origem às tensões superficiais. Cada tensão está representada com dois índices, sendo que o primeiro representa a superfície na qual a tensão atua (plano perpendicular à direção), e o segundo índice indica a direção de atuação. Ela será positiva quando o vetor representativo aponta para o sentido positivo do sistema de coordenada e quando a área na qual atua apresenta normal positiva. Caso contrário, a tensão será negativa.

Assim, aplicando-se a segunda lei de Newton no volume de controle e considerando a força resultante na direção x, por simplicidade, as componentes y e z serão análogas:

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x$$

A partir dos balanços de forças são obtidas as equações do movimento de um fluido. Não faremos a demonstração da obtenção dessas equações, mas todas as etapas desse processo podem ser encontradas nos livros indicados.

Para um fluido newtoniano incompressível, as equações do movimento são:

- Direção x:

$$\rho\frac{DV_x}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)$$

- Direção y:

$$\rho\frac{DV_y}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right)$$

- Direção z:

$$\rho\frac{DV_z}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)$$

Sendo:

$$\frac{DV_x}{Dt} = \frac{\partial V_x}{\partial x}V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y}V_y + \frac{\partial V_x}{\partial z}V_z + \frac{\partial V_x}{\partial t}$$

$$\frac{DV_y}{Dt}=\frac{\partial V_y}{\partial x}V_x+\frac{\partial V_y}{\partial y}V_y+\frac{\partial V_y}{\partial z}V_z+\frac{\partial V_y}{\partial t}$$

$$\frac{DV_z}{Dt}=\frac{\partial V_z}{\partial x}V_x+\frac{\partial V_z}{\partial y}V_y+\frac{\partial V_z}{\partial z}V_z+\frac{\partial V_z}{\partial t}$$

As equações acima são conhecidas como as equações de Navier-Stokes, que combinadas com a equação da conservação da massa, fornecem uma descrição matemática do escoamento incompressível de um fluido newtoniano. São equações diferenciais parciais de segunda ordem não lineares, de grande complexidade.

Para coordenadas cilíndricas (r, θ, z):

- Direção r:

$$\rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}+V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}-\frac{V_\theta^2}{r}\right)=$$
$$=\rho g_r-\frac{\partial P}{\partial r}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rV_r)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}\right]$$

- Direção θ:

$$\rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z}-\frac{V_r V_\theta}{r}\right)=$$
$$=\rho g_\theta-\frac{\partial P}{\partial \theta}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rV_\theta)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2}\right]$$

- Direção z:

$$\rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)=$$
$$=\rho g_z-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right]$$

## Escoamento Invíscido

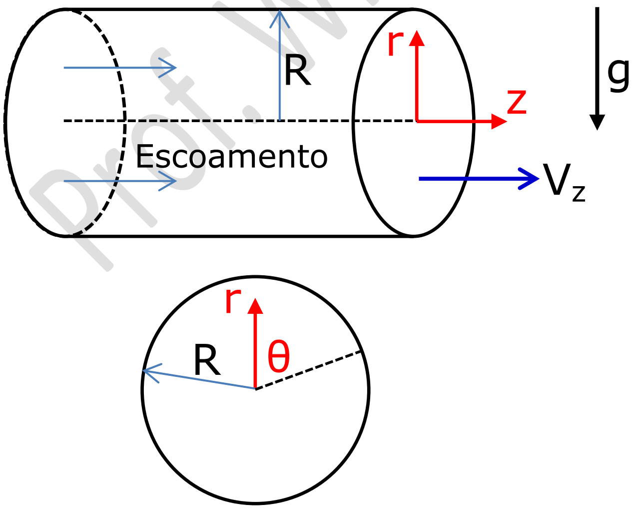
As tensões de cisalhamento presentes nos escoamentos são devidas à viscosidade do fluido. Se desprezarmos os efeitos da viscosidade (fluidos com viscosidade muito baixa, como os gases), ou seja, se considerarmos nulas as tensões de cisalhamento, teremos escoamentos invíscidos ou não viscosos ou sem atrito. As equações do movimento se tornam:

| | |
|---|---|
| Direção x: | $\rho g_x - \dfrac{\partial P}{\partial x} = \rho\left(\dfrac{\partial V_x}{\partial t} + V_x\dfrac{\partial V_x}{\partial x} + V_y\dfrac{\partial V_x}{\partial y} + V_z\dfrac{\partial V_x}{\partial z}\right)$ |
| Direção y: | $\rho g_y - \dfrac{\partial P}{\partial y} = \rho\left(\dfrac{\partial V_y}{\partial t} + V_x\dfrac{\partial V_y}{\partial x} + V_y\dfrac{\partial V_y}{\partial y} + V_z\dfrac{\partial V_y}{\partial z}\right)$ |
| Direção z: | $\rho g_z - \dfrac{\partial P}{\partial z} = \rho\left(\dfrac{\partial V_z}{\partial t} + V_x\dfrac{\partial V_z}{\partial x} + V_y\dfrac{\partial V_z}{\partial y} + V_z\dfrac{\partial V_z}{\partial z}\right)$ |

As equações acima são conhecidas como as equações de Euler, básicas da Mecânica dos Fluidos.

## Escoamento Permanente em um Conduto Circular Longo

Imagine um fluido escoando no interior de um conduto de seção circular uniforme:




Hipóteses:

1 - Escoamento laminar;
2 - Regime permanente;
3 - Fluido newtoniano (μ=cte);
4 - Fluido incompressível (ρ=cte);
5 - Escoamento da direção z.

$$V_r = V_\theta = 0$$

$$V_z = V_z(r)$$

Desejamos obter uma expressão para a distribuição da velocidade do fluido. A análise será feita utilizando-se coordenadas cilíndricas.

- Equação da Continuidade (r, θ, z):

$$\cancelto{0\ \text{(H2)}}{\frac{\partial\rho}{\partial t}}+\frac{1}{r}\cancelto{0\ \text{(H5)}}{\frac{\partial(\rho r V_r)}{\partial r}}+\frac{1}{r}\cancelto{0\ \text{(H5)}}{\frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial\theta}}+\frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z}=0$$

Assim:

$$\frac{\partial V_z}{\partial z}=0$$

- Equação do movimento (direção z):

$$\rho\left(\cancelto{\text{(H2)}}{\frac{\partial V_z}{\partial t}}+\cancelto{\text{(H5)}}{V_r}\frac{\partial V_z}{\partial r}+\cancelto{\text{(H5)}}{\frac{V_\theta}{r}}\frac{\partial V_z}{\partial\theta}+V_z\cancelto{\text{(E.C.)}}{\frac{\partial V_z}{\partial z}}\right)=$$

$$=\rho g_z-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial\theta^2}+\cancelto{\text{(E.C.)}}{\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}}\right]$$

Logo:

$$0=\rho g_z-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial\theta^2}\right]$$

Como o escoamento é simétrico em torno do eixo z, e $V_z=V_z(r)$, temos:

$$\frac{\partial^2 V_z}{\partial\theta^2}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial V_z}{\partial\theta}\right)=0$$

$V_z$ não é função de θ.

Portanto:

$$\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\right]=\frac{\partial P}{\partial z}$$

A pressão não é função de r ou de θ, é função apenas de z, assim:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV_z}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\left(\frac{dP}{dz}\right)$$

Condições de contorno:

1. $r = R \rightarrow V_z = 0$ (a velocidade na parede do tubo é nula);

2. $r = 0 \rightarrow \frac{dV_z}{dr}=0$ (condição de simetria, $V_z = V_{máx}$).

Uma vez que P não depende de r, a equação acima pode ser integrada considerando que (dP/dz) = constante.

$$d\left(r\frac{dV_z}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\left(\frac{dP}{dz}\right)rdr$$

Integrando:

$$r\frac{dV_z}{dr}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{dP}{dz}\right)\frac{r^2}{2}+C_1$$

Observando-se a Condição de Contorno 2, temos informações para encontrarmos $C_1$. Portanto: $\boxed{C_1 = 0}$.

Voltando na equação acima:

$$r\frac{dV_z}{dr}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{dP}{dz}\right)\frac{r^2}{2} \quad \rightarrow \quad dV_z=\frac{1}{2\mu}\left(\frac{dP}{dz}\right)rdr$$

Integrando:

$$V_z=\frac{1}{4\mu}\left(\frac{dP}{dz}\right)r^2+C_2$$

Da Condição de Contorno 1: $\boxed{C_2=\frac{-R^2}{4\mu}\left(\frac{dP}{dz}\right)}$

Portanto:

$$V_z = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{dP}{dz}\right)\left(r^2 - R^2\right)$$ Perfil de velocidade.

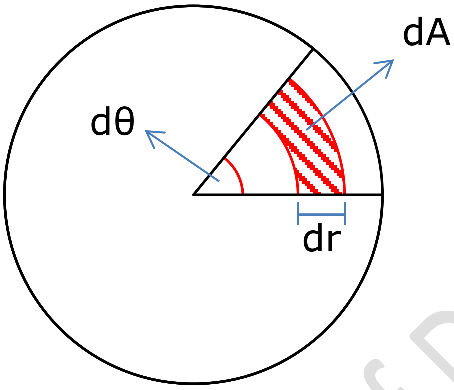
A queda de pressão, ΔP, em um comprimento, L, de tubo, pode ser escrito:

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{dP}{dz} = \frac{(P_L - P_o)}{L}$$

Assim:

$$V_z = \frac{(P_o - P_L)}{4\mu L} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$ Equação válida para escoamento laminar.

A velocidade média do escoamento pode ser calculada pelo teorema da média. Para uma propriedade que varia na área:




$$\bar{V} = \frac{\iint V dA}{\iint dA}$$

$$\bar{V} = \frac{\iint V_z r dr d\theta}{\iint r dr d\theta}$$

dA = rdrdθ

$$\bar{V} = \frac{\iint \frac{(P_o - P_L)}{4\mu L} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] r dr d\theta}{\iint r dr d\theta}$$

$$\bar{V} = \frac{\iint \frac{-\Delta P}{4\mu L}\left(R^2 r - r^3\right) dr d\theta}{\iint r dr d\theta} \rightarrow \bar{V} = \frac{\frac{-\Delta P}{4\mu L}\left[\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \left(R^2 r - r^3\right) dr\right]}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr}$$

$$\bar{V} = \frac{\frac{-\Delta P}{4\mu L}\left(2\pi R^2 \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4}\right)}{2\pi \frac{R^2}{2}} = \frac{\frac{-2\pi\Delta P}{4\mu L}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right)}{\pi R^2} = \frac{-\Delta P R^2}{8\mu L}$$

$$\bar{V} = \frac{-\Delta P R^2}{8\mu L} = \frac{(P_o - P_L) R^2}{8\mu L}$$

A vazão volumétrica deste escoamento pode ser calculada:

$$\dot{V}=\bar{V}A=\frac{(P_o-P_L)R^2}{8\mu L}\pi R^2=\frac{(P_o-P_L)\pi R^4}{8\mu L}$$

A vazão mássica deste escoamento pode ser calculada:

$$\dot{m}=\rho\dot{V}=\frac{\rho(P_o-P_L)\pi R^4}{8\mu L}$$ Equação de Hagen-Poiseuille

A velocidade máxima ocorre quando r = 0: $V_{zmáx}=\frac{(P_o-P_L)}{4\mu L}R^2$

Podemos relacionar: $\bar{V}=\frac{1}{2}V_{zmáx}$

A partir da distribuição de velocidades podemos encontrar o perfil das tensões tangencias (tensões de cisalhamento ou de atrito). A Lei de Newton da viscosidade relaciona a tensão tangencial (força por unidade de área) à taxa de variação espacial de velocidade:

$$\tau_z=-\mu\left[\frac{dV_z}{dr}\right]$$

μ: viscosidade do fluido. O atrito é tanto maior quanto maior a viscosidade do fluido. A unidade de μ é o kg/m.s = Pa.s, outra unidade muito empregada é o centipoise (cp), dado por: 1 cp = $10^{-2}$ poise (g/cm.s) = mPa.s = $10^{-3}$ Pa.s.

Assim:

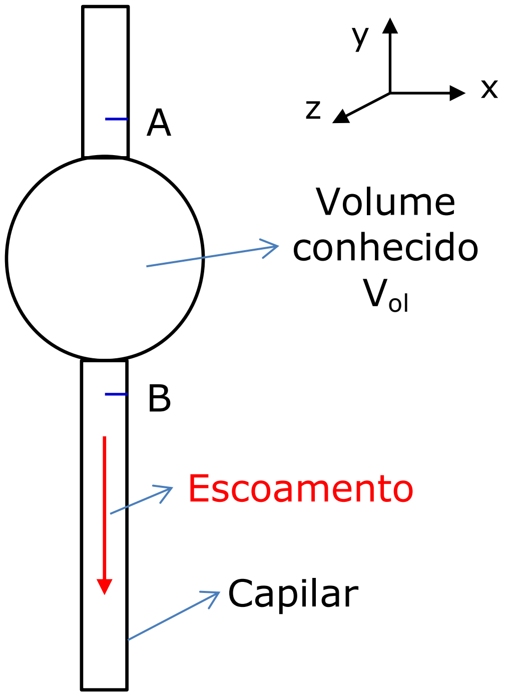
$$\tau_z=\frac{(P_o-P_L)}{2L}r$$

A força de atrito exercida na parede do tubo:

$$\tau_z=\frac{F_z}{A}=\frac{(P_o-P_L)}{2L}R \quad \rightarrow \quad F_z=\frac{2\pi RL(P_o-P_L)}{2L}R=\pi R^2(P_o-P_L)$$

## Viscosímetro Capilar

A viscosidade de um líquido pode ser determinada através da medida do tempo de escoamento do líquido no interior de um tubo capilar (tubo de pequeno diâmetro) - viscosímetro de Ostwald.




Hipóteses:

1 - regime permanente;
2 - escoamento laminar;
3 - μ e ρ constantes;
4 - escoamento unidirecional em y.

A vazão de um fluido escoando no interior de um conduto pode ser dada pela equação de Hagen-Poiseuille:

$$\dot{V} = \frac{(P_o - P_L)\pi R^4}{8\mu L} \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{(P_o - P_L)\pi R^4}{8\dot{V}L}$$

A queda de pressão entre dois pontos do capilar (vertical), separados de uma distância L, pode ser dada por:

$$\Delta P/L = -\rho g \quad \rightarrow \quad (P_L - P_o) = -\rho g L \quad \rightarrow \quad (P_o - P_L) = \rho g L$$

Assim:

$$\mu = \frac{\rho g \pi R^4}{8\dot{V}}$$

A vazão volumétrica do líquido pode ser obtida pela medida do tempo de escoamento entre os pontos A e B do viscosímetro, uma vez que o volume entre esses dois pontos é conhecido:

$$\mu = \frac{\rho g \pi R^4}{8V_{ol}} \Delta t$$

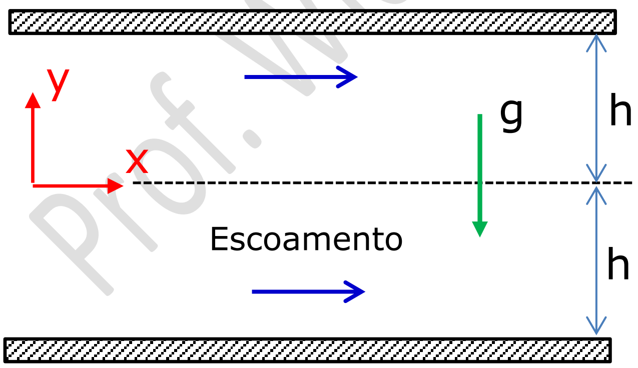
O viscosímetro permite também a determinação da viscosidade de um líquido a partir da comparação com uma substância padrão, com viscosidade conhecida. Dessa maneira, comparam-se os tempos de escoamento dos dois líquidos:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\rho_1 \Delta t_1}{\rho_2 \Delta t_2}$$

A comparação deve ser feita no mesmo equipamento sob as mesmas condições de pressão e temperatura.

## Escoamento Laminar Permanente entre duas Placas Planas Paralelas Infinitas

Considere o escoamento de um fluido entre duas placas planas paralelas e infinitas (largura e comprimento grandes).




Hipóteses:

1 - Escoamento laminar;
2 - Regime permanente;
3 - Fluido newtoniano (μ=cte);
4 - Fluido incompressível (ρ=cte);
5 - Escoamento da direção x:

$$V_y = V_z = 0$$
$$V_x = V_x(y)$$

Desejamos obter uma expressão para a distribuição da velocidade do fluido. A análise será feita utilizando-se coordenadas retangulares.

- Equação da Continuidade (x, y, z):

$$\cancelto{0\ (H2)}{\frac{\partial \rho}{\partial t}}+\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x}+\cancelto{0\ (H5)}{\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y}}+\cancelto{0\ (H5)}{\frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z}}=0$$

Assim:

$$\frac{dV_x}{dx}=0$$

- Equação do Movimento (direção x):

$$\rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}V_x+\frac{\partial V_x}{\partial y}V_y+\frac{\partial V_x}{\partial z}V_z+\frac{\partial V_x}{\partial t}\right)=\rho g_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)$$

Após simplificações:

$$0=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}\right) \qquad \rightarrow \qquad \frac{dP}{dx}=\mu\left(\frac{d^2 V_x}{dy^2}\right)=\mu\frac{d}{dy}\left(\frac{dV_x}{dy}\right)$$

Neste caso, a pressão não é função de y e z, mas de x.

Condições de contorno:

1. $y = \pm h \rightarrow V_x = 0$ (a velocidade na parede da placa é nula);

2. $y = 0 \rightarrow \frac{dV_x}{dy}=0$ (condição de simetria, $V_x = V_{máx}$).

Integrando:

$$\frac{dV_x}{dy}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)y + C_1$$

Para a condição de contorno 2: $\boxed{C_1 = 0}$
Voltando na equação acima:

$$\frac{dV_x}{dy} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)y \qquad \rightarrow \qquad dV_x = \frac{1}{\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)ydy$$

Integrando:

$$V_x = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{dP}{dz}\right)y^2 + C_2$$

Da condição de contorno 1: $\boxed{C_2 = \frac{-h^2}{2\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)}$

Portanto:

$$V_x = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(y^2 - h^2\right)$$ Perfil de velocidade.

A velocidade média do escoamento pode ser calculada pelo teorema da média.

$$\bar{V} = \frac{(P_o - P_L)h^2}{3\mu L}$$

A velocidade máxima ocorre quando y = 0: $\bar{V} = \frac{2}{3}V_{zmáx}$

## Viscosímetro Rotacional

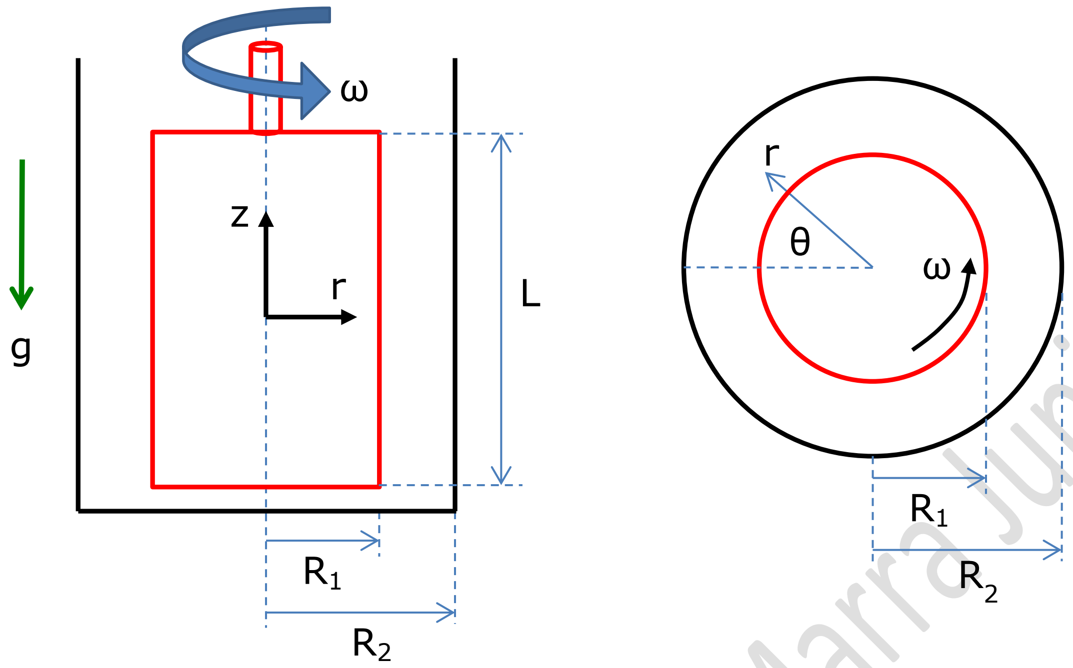
A viscosidade de um fluido pode ser determinada medindo-se o torque necessário para girar-se um objeto sólido em contato com o fluido.

O escoamento é laminar tangencial e permanente na região anular entre dois cilindros coaxiais. Os efeitos de bordas são desprezíveis. Na porção anular o fluido se move em trajetória circular (direção θ).

Hipóteses:

1 - Escoamento laminar;
2 - Regime permanente;
3 - Fluido newtoniano (μ=cte);
4 - Fluido incompressível (ρ=cte);
5 - Escoamento da direção θ:
$V_r = V_z = 0$

$V_\theta = V_\theta(r)$




- Equação da Continuidade (r, θ, z):

$$\cancelto{0\ (H2)}{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \frac{1}{r}\cancelto{0\ (H5)}{\frac{\partial(\rho r V_r)}{\partial r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \cancelto{0\ (H5)}{\frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z}} = 0$$

Assim:

$$\frac{dV_\theta}{d\theta} = 0$$

- Equação do movimento (direção θ), após simplificações:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rV_\theta)\right] = 0$$

Condições de contorno:

1. $r = R_1 \rightarrow V_\theta = \omega R_1$
2. $r = R_2 \rightarrow V_\theta = 0$

Integrando:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rV_\theta) = C_1$$

$$\frac{d}{dr}(rV_\theta)=C_1 r \qquad \rightarrow \qquad d(rV_\theta)=C_1 r dr$$

Integrando:

$$rV_\theta=C_1\frac{r^2}{2}+C_2 \qquad \rightarrow \qquad V_\theta=C_1\frac{r}{2}+\frac{C_2}{r}$$

Da condição de contorno 1: $\omega R_1=C_1\frac{R_1}{2}+\frac{C_2}{R_1}$

Da condição de contorno 2: $0=C_1\frac{R_2}{2}+\frac{C_2}{R_2} \rightarrow C_1=-\frac{2C_2}{R_2{}^2}$

$$\omega R_1=-\frac{2C_2}{R_2{}^2}\frac{R_1}{2}+\frac{C_2}{R_1} \qquad \rightarrow \qquad C_2=\frac{\omega R_1}{\left(\frac{1}{R_1}-\frac{R_1}{R_2{}^2}\right)}$$

$$C_1=-\frac{2}{R_2{}^2}\frac{\omega R_1}{\left(\frac{1}{R_1}-\frac{R_1}{R_2{}^2}\right)}$$

Voltando na equação original:

$$V_\theta=-\frac{2}{R_2{}^2}\frac{\omega R_1}{\left(\frac{1}{R_1}-\frac{R_1}{R_2{}^2}\right)}\frac{r}{2}+\frac{1}{r}\frac{\omega R_1}{\left(\frac{1}{R_1}-\frac{R_1}{R_2{}^2}\right)}=\frac{\omega R_1}{\left(\frac{1}{R_1}-\frac{R_1}{R_2{}^2}\right)}\left(\frac{1}{r}-\frac{r}{R_2{}^2}\right)$$

$$V_\theta=\frac{\omega R_1^2 R_2^2}{\left(R_1^2-R_2^2\right)}\left(\frac{1}{r}-\frac{r}{R_2{}^2}\right)$$

A partir da distribuição de velocidades podemos achar o perfil da tensão de cisalhamento:

$$\tau_\theta = -\mu r \frac{d}{dr}\left(\frac{V_\theta}{r}\right)$$

$$\tau_\theta = -\mu r \frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\omega R_1^2 R_2^2}{\left(R_1^2 - R_2^2\right)}\left(\frac{1}{r} - \frac{r}{{R_2}^2}\right)\right]\right\}$$

$$\tau_\theta = -\mu r \frac{\omega R_1^2 R_2^2}{\left(R_1^2 - R_2^2\right)} \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{{R_2}^2}\right)$$

$$\tau_\theta = -\mu r \frac{\omega R_1^2 R_2^2}{\left(R_1^2 - R_2^2\right)}\left(\frac{-2}{r^3}\right) = 2\mu \frac{\omega R_1^2 R_2^2}{\left(R_1^2 - R_2^2\right)}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

O torque (T) que age no cilindro interno é dado pelo produto da tensão de cisalhamento, a área de atuação e o "braço" de alavanca:

$$T = (\tau_\theta)_{r=R_1}(2\pi R_1 L)R_1 \qquad T = 4\pi\mu L \frac{\omega R_1^2 R_2^2}{\left(R_1^2 - R_2^2\right)}$$

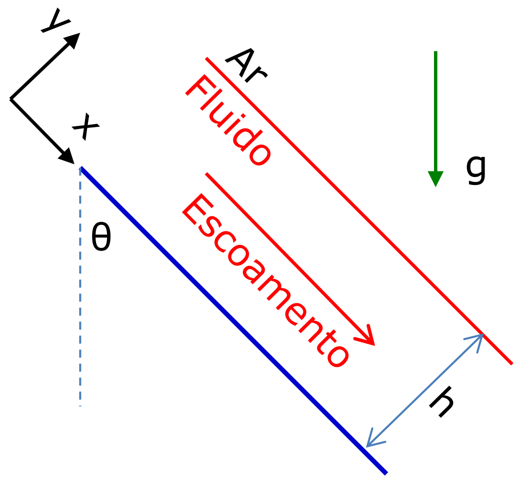
A viscosidade do fluido pode então ser determinada:

$$\mu = \frac{T\left(R_1^2 - R_2^2\right)}{4\pi L \omega R_1^2 R_2^2}$$

O valor do torque e da velocidade angular são fornecidos pelo equipamento.

## Escoamento Laminar Permanente de um Filme Fluido sobre uma Placa Plana Infinita

Nos estudos dos escoamentos consideramos, até o momento, apenas escoamentos internos ou confinados. Veremos agora um caso de escoamento externo ou aberto: o escoamento de um filme fluido sobre uma superfície.




Hipóteses:

1 - Escoamento laminar;
2 - Regime permanente;
3 - Fluido newtoniano ($\mu$=cte);
4 - Fluido incompressível ($\rho$=cte);
5 - Placa de grandes dimensões;
6 - Escoamento da direção x:

$$V_y = V_z = 0 \quad \rightarrow \quad V_x = V_x(y)$$

7 - A pressão do fluido é função de y:

$$P = P(y) \quad \rightarrow \quad P \neq P(x, y)$$

Escoamento aberto!

- Equação da Continuidade (x, y, z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z}=0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dV_x}{dx}=0$$

- Equação do Movimento (direção x):

$$\rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}V_x+\frac{\partial V_x}{\partial y}V_y+\frac{\partial V_x}{\partial z}V_z+\frac{\partial V_x}{\partial t}\right)=\rho g_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)$$

Após simplificações:

$$0=\rho g\cos\theta-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}\right) \qquad \rightarrow \qquad \mu\frac{d}{dy}\left(\frac{dV_x}{dy}\right)+\rho g\cos\theta = 0$$

Neste caso, a pressão não é função de x e z, mas de y.

Condições de contorno:

1. $y = 0 \rightarrow V_x = 0$ (a velocidade na placa é nula);

2. $y = h \rightarrow \frac{dV_x}{dy}=0$ (na interface fluido/ar, a tensão de cisalhamento é nula, portanto a velocidade é máxima: $V_x = V_{máx}$).

Integrando:

$$\frac{dV_x}{dy} = -\frac{\rho g}{\mu}\cos\theta y + C_1$$

Condição de contorno 2: $$C_1 = \frac{\rho g}{\mu}\cos\theta h$$

Voltando na equação acima:

$$\frac{dV_x}{dy} = \frac{\rho g}{\mu}\cos\theta(h - y) \quad \rightarrow \quad dV_x = \frac{\rho g}{\mu}\cos\theta(h - y)dy$$

Integrando:

$$V_x = \frac{\rho g}{\mu}\cos\theta(hy - \frac{y^2}{2}) + C_2$$

Da condição de contorno 1: $C_2 = 0$
Portanto:

$$V_x = \frac{\rho g h}{\mu}\cos\theta\left(y - \frac{y^2}{2h}\right)$$ Perfil de velocidade.

A velocidade máxima ocorre quando y = h: $$V_{máx} = \frac{\rho g h^2}{2\mu}\cos\theta$$

A velocidade média do escoamento pode ser calculada pelo teorema da média.

$$\bar{V} = \frac{2}{3}\left(\frac{\rho g h^2}{2\mu}\cos\theta\right) = \frac{2}{3}V_{máx}$$

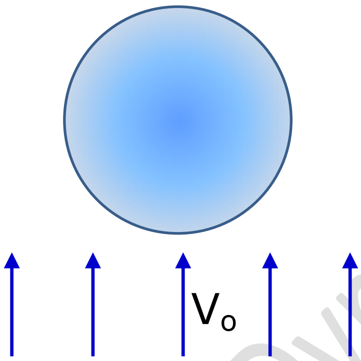
A tensão de cisalhamento: $\tau_x = -\mu\dfrac{dV_x}{dy}$

$$\tau_x = \rho g \cos\theta (y - h)$$

Assumindo dimensões X e Z para a placa, a força na placa: $F = \rho g h X Z \cos\theta$.

## Escoamento Lento em Torno de uma Esfera

O escoamento em torno de uma esfera é do tipo aberto, como no caso anterior da placa plana, mas apresenta uma complexidade maior, assim, citaremos apenas os resultados que dizem respeito ao escoamento muito lento de um fluido, também chamado de escoamento de Stokes. Neste caso, o número de Reynolds é menor que 1,0.




$$Re = \frac{\rho V_o D}{\mu}$$

D = diâmetro da esfera.

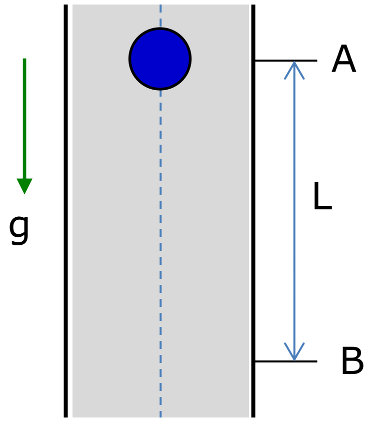
A força de arraste ou atrito sobre a esfera é dada por:

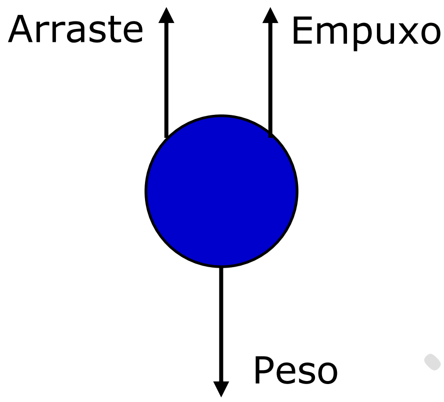
$$F_d = 6\pi\mu R V_o$$

Válida para $Re \leq 1,0$.

## Viscosímetro de Stokes

Se uma pequena esfera é deixada cair, a partir do repouso, em um fluido viscoso, ele irá acelerar até atingir uma velocidade constante - a velocidade terminal, nessa situação: $\sum F = 0$. Se medirmos o tempo de queda da esfera entre dois pontos determinados, separados por uma distância conhecida, teremos a velocidade de queda da esfera.




A partir de um balanço de forças na esfera em queda:

$$\text{Empuxo} + \text{Arraste} = \text{Peso}$$

$$(4/3)\pi R^3 \rho g + 6\pi\mu R V_t = (4/3)\pi R^3 \rho_s g$$

$\rho$ = densidade do fluido;
$\rho_s$ = densidade do sólido;
$V_t$ = velocidade terminal da esfera.

Portanto:

$$\mu = \frac{gD^2(\rho_s - \rho)}{18V_t} = \frac{gD^2(\rho_s - \rho)\Delta t}{18L}$$

$\mu$ = viscosidade do fluido;
L = espaçamento entre dois pontos A e B;
$\Delta t$ = tempo de queda para L;
D = diâmetro da esfera.

Ex. - Um viscosímetro de Stokes foi utilizado para medir-se a viscosidade da glicerina a 20 $^oC$. Foi utilizada uma esfera de aço de 3,7 mm de diâmetro e o tempo de queda médio foi de 15,6 s para um espaçamento de 50 cm. A densidade da glicerina nesta temperatura é de 1.260 kg/m$^3$ e a do aço é 7.800 kg/m$^3$. Qual a viscosidade da glicerina? É possível admitir-se escoamento de Stokes?

Pela expressão da viscosidade:

$$\mu = \frac{gD^2(\rho_s - \rho)\Delta t}{18L} = \frac{9{,}81 \times (0{,}0037)^2 \times (7800-1260) \times 15{,}6}{18 \times 0{,}5} = 1{,}52 \text{ Pa.s}$$

$$\mu = 1{,}52 \text{ Pa.s}$$

A velocidade terminal: $V_t = 0{,}5/15{,}6 = 0{,}032$ m/s

O número de Reynolds:

$$Re = \frac{1260 \times 0{,}032 \times 0{,}0037}{1{,}52} = 0{,}098 \leq 0{,}1$$

Portanto, é possível admitir-se escoamento de Stokes.