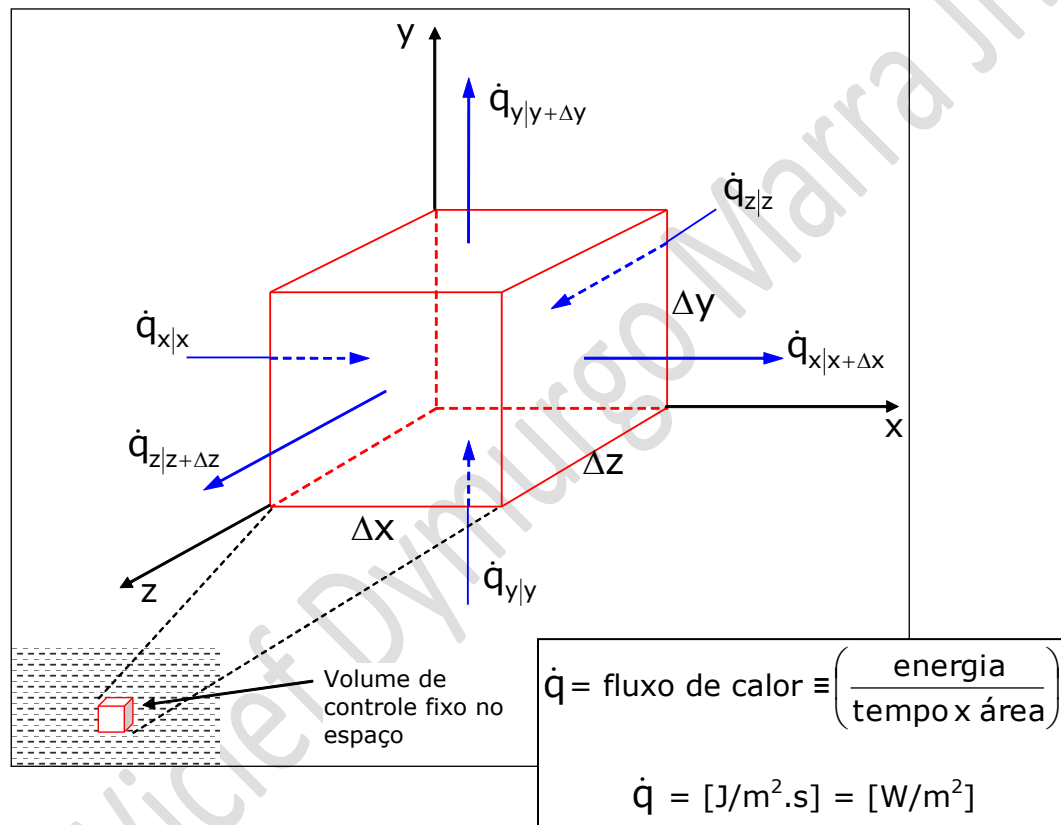


1 - Equação de Conservação de Energia Térmica

Procuramos uma equação que descreva a distribuição de temperatura em todos os tipos de situação. Para um elemento de volume, como da figura abaixo, a variação de energia térmica em seu interior ocorre devido às parcelas de energia em trânsito e da energia gerada ou consumida.



Esquemáticamente:

Variação da energia	=	Energia que entra	-	Energia que sai	+	Energia gerada / consumida
---------------------	---	-------------------	---	-----------------	---	----------------------------

A variação da energia interna, ou acúmulo:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \rho C_p \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial T}{\partial t}$$

ρ = densidade do fluido [kg/m^3];

C_p = calor específico do fluido [$\text{J}/\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}$].

A energia gerada ou consumida (reações químicas) é representada por \dot{G} e dependerá da cinética da reação.

\dot{G} = taxa de geração de energia (energia/tempo);

$$\dot{G} = \dot{g}' \Delta x \Delta y \Delta z$$

\dot{g}' = geração de energia por unidade de tempo e volume.

Aplicando o conceito da conservação da energia (1ª lei da termodinâmica):

$$\begin{aligned} \dot{q}_{x|x} \Delta y \Delta z + \dot{q}_{y|y} \Delta x \Delta z + \dot{q}_{z|z} \Delta x \Delta y + \dot{g}' \Delta x \Delta y \Delta z &= \\ = \dot{q}_{x|x+\Delta x} \Delta y \Delta z + \dot{q}_{y|y+\Delta y} \Delta x \Delta z + \dot{q}_{z|z+\Delta z} \Delta x \Delta y + \rho C_p \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned}$$

Dividindo-se a expressão acima pelo volume $\Delta x \Delta y \Delta z$, e tomando-se o limite quando Δx , Δy e Δz tendem a zero, temos:

$$\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} + \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \dot{g}' = 0$$

O fluxo de energia térmica através das superfícies, associado à temperatura do fluido, pode ser avaliado por dois mecanismos. Um deles devido à difusão, ou condução, e o outro devido ao movimento do fluido (convecção):

$$\dot{q} = \dot{q}_d + \rho C_p V T$$

V = velocidade do fluido;

T = temperatura do fluido.

$$\dot{q}_d = -K \frac{\partial T}{\partial s}$$

(s = direção característica)

Assim podemos escrever:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho C_p V_x T - K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho C_p V_y T - K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho C_p V_z T - K \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \dot{g}' = 0$$

Assumindo ρ , C_p e K como constantes:

$$\begin{aligned} \rho C_p T \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \rho C_p \left(V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} &= \\ &= K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{g}' \end{aligned}$$

Como o fluido é incompressível ($\rho = \text{cte.}$):

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = 0$$

Portanto:

$$\begin{aligned} &\overbrace{\rho C_p \left(V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right)}^{\text{Convecção}} + \overbrace{\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}}^{\text{Acúmulo}} = \\ &= K \underbrace{\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)}_{\text{Condução}} + \dot{g}' \quad \swarrow \text{Geração} \end{aligned}$$

A equação acima com todos os diferentes termos é bastante complexa, porém neste curso, não tentaremos resolvê-la mantendo todos os seus termos. Dependendo da situação em particular, apenas alguns termos serão mantidos. Podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{g}'}{\rho C_p}$$

$$\alpha = \frac{K}{\rho C_p} = \text{difusividade térmica [m}^2/\text{s]}$$

Cada termo desta equação tem a unidade de W/m^3 ou J/s.m^3 , que representa energia por unidade de tempo por unidade de volume.

Termo	O que representa	Quando pode ser ignorado
Acúmulo	Taxa de mudança da energia acumulada.	Estado estacionário (não há mudança da temperatura com o tempo).
Convecção	Taxa de energia líquida transportada devido ao movimento do meio.	Normalmente em sólidos, sem movimentação de fluido.
Condução	Taxa de energia líquida transportada devido à difusão.	Quando os outros mecanismos de transporte de energia são predominantes.
Geração	Taxa de geração de energia.	Não há geração interna de calor devido a reações químicas.

Se o fluido está em repouso (meio estacionário), sem geração de energia $\dot{g}' = 0$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad [\text{Eq. de Fourier}]$$

Se o regime é permanente:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0 \quad [\text{Eq. de Laplace}]$$

Coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \left(V_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= \\ &= \alpha \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{g}'}{\rho C_p} \end{aligned}$$

Coordenadas esféricas:

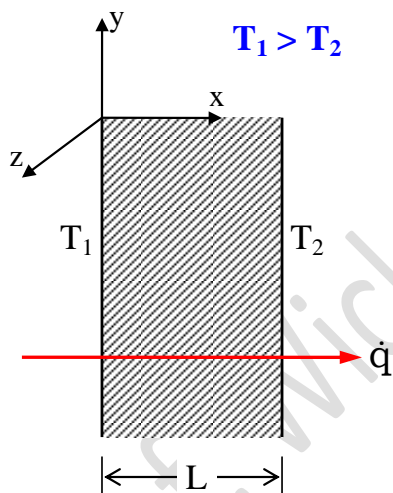
$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(V_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) =$$

$$= \alpha \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right) + \frac{\dot{g}'}{\rho C_p}$$

1.1 - Condução de Calor Unidirecional em Regime Permanente.

Considere um sistema com variação de temperatura apenas em uma dimensão, em estado estacionário, sem geração interna de calor.

Placa plana sólida de espessura L: as duas superfícies da placa estão com temperaturas fixas e uniformes, T_1 e T_2 .



Hipóteses:

- 1 - regime permanente;
- 2 - condução unidirecional em x;
- 3 - $K, \rho, C_p = \text{cte}'s$;
- 4 - dimensões y e z infinitas;
- 5 - não há geração de calor interna.

A equação geral:

$$\overset{0 \text{ (H1)}}{\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}}} + \left(\cancel{V_x \frac{\partial T}{\partial x}} + \cancel{V_y \frac{\partial T}{\partial y}} + \cancel{V_z \frac{\partial T}{\partial z}} \right) = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \overset{0 \text{ (H2)}}{\cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}} + \overset{0 \text{ (H2)}}{\cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}} \right) + \overset{0 \text{ (H5)}}{\cancel{\frac{\dot{g}'}{\rho C_p}}}$$

Assim, a equação governante para este caso específico torna-se:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) = 0 \rightarrow \left(\frac{d^2 T}{dx^2}\right) = 0 \quad \left[\begin{array}{l} \text{equação diferencial} \\ \text{ordinária} \\ \text{de segunda ordem} \end{array} \right]$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) = 0 \rightarrow \left(\frac{dT}{dx} \right) = \text{constante} \rightarrow \frac{dT}{dx} = C_1$$

Integrando: $T = C_1 x + C_2$

Para determinação de C_1 e C_2 precisamos de *condições de contorno*, que neste caso são:

1. $x = 0 \rightarrow T = T_1$
2. $x = L \rightarrow T = T_2$

Assim:

$$\text{CC1} \rightarrow T_1 = C_2$$

$$\text{CC2} \rightarrow T_2 = C_1 L + C_2 \rightarrow T_2 = C_1 L + T_1$$

$$C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

Portanto:

$$T = \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right) x + T_1$$

Perfil de temperatura no interior da placa em função de x .
Note que o perfil é linear!

Podemos também determinar uma expressão para o fluxo de calor, \dot{q} :

$$\dot{q} = -K \frac{dT}{dx} \rightarrow \frac{dT}{dx} = C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} \rightarrow \dot{q} = -K \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right)$$

Obs.: O fluxo de calor é constante ao longo da direção x !!!

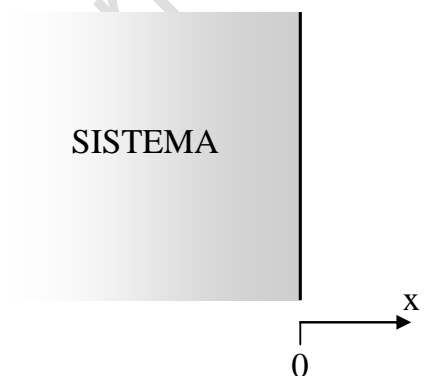
A taxa de transferência de calor (\dot{Q}) pode ser escrita:

$$\dot{Q} = \dot{q}A \rightarrow \dot{Q} = -KA \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right)$$

A = área de seção perpendicular à direção do fluxo de calor.

Tipos de Condições de Contorno

Como vimos, condições de contorno são necessárias para a solução das equações governantes. A descrição de um problema de transferência de calor em um sistema não está completa sem informações sobre as condições térmicas das superfícies (fronteiras) do sistema.



a) **Temperatura da superfície especificada:** a temperatura superficial, T_s , pode ser especificada como constante ou como função do tempo:

$$T|_{x=0} = T_s$$

b) **Fluxo de calor superficial especificado:** algumas vezes é possível especificar a taxa de transferência de calor ou o fluxo de calor numa superfície.

$$\underbrace{-K \frac{dT}{dx}}_{\text{"dentro do sistema"}} \Big|_{x=0} = \underbrace{\dot{q}_s}_{\text{"fora do sistema"}}$$

Superfície isolada: superfícies são isoladas para redução do fluxo de calor. Quando a superfície é isolada, podemos considerar que o fluxo de calor através da superfície é muito pequeno, $\dot{q}_s \approx 0$.

$$-K \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = 0$$

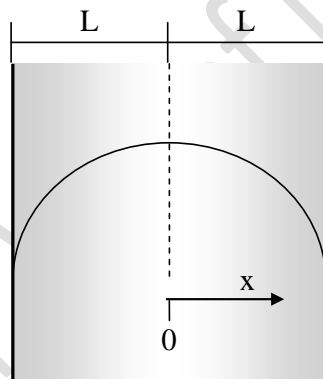
Convecção na superfície: o fluxo de calor fora do sistema é, predominantemente, convectivo.

$$\underbrace{-K \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0}}_{\text{Condução}} = \underbrace{h(T|_{x=0} - T_{\infty})}_{\text{Convecção}}$$

h = coeficiente de transferência de calor convectivo;
 T_{∞} = temperatura externa longe da superfície.

Note que a temperatura superficial, $T(x=0)$, não é conhecida. Quando $h \rightarrow \infty$, podemos assumir: $T(x=0) = T_{\infty}$.

c) Condição de simetria: em algumas situações, o perfil interno de temperatura é simétrico em relação ao plano central do sistema.



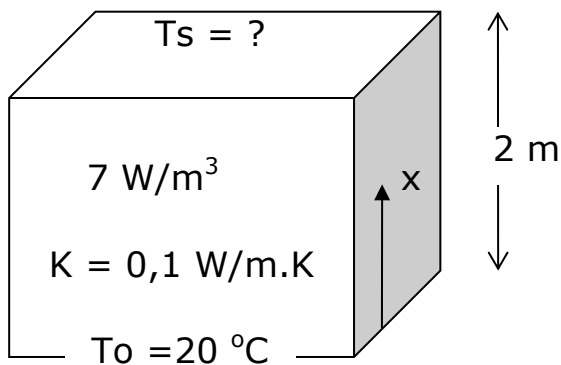
Neste caso:

$$-K \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = 0$$

Ex.: Considere uma pilha de compostagem com 2 m de altura. A temperatura externa ambiente é de 40°C e $h = 50 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$. A temperatura na base da pilha é de 20°C . A geração bioquímica interna de calor é de 7 W/m^3 . A condutividade térmica do material é de $0,1 \text{ W/m}\cdot\text{K}$. Considerando apenas a transferência interna de calor por condução, desprezando a convecção no interior poroso da pilha, determine: a expressão

do perfil de temperatura em função da altura da pilha; as temperaturas superficial e máxima na pilha.

$$40 \text{ }^\circ\text{C} \quad h_\infty = 50 \text{ W/m}^2\text{K}$$



$$\alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \frac{\dot{g}'}{\rho C_p} = 0$$

Assim, a equação governante para este caso específico torna-se:

$$K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \dot{g}' = 0 \rightarrow \left(\frac{d^2 T}{dx^2} \right) = -\frac{\dot{g}'}{K}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) = -\frac{\dot{g}'}{K}$$

Condições de contorno:

$$1. x = 0 \rightarrow T = T_0$$

$$2. x = L \rightarrow -K \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = h(T|_{x=L} - T_\infty) \rightarrow \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = -\frac{h}{K} (T_S - T_\infty)$$

$$\text{Integrando: } \left(\frac{dT}{dx} \right) = -\frac{\dot{g}'}{K} x + C_1$$

Assim:

$$\text{CC2} \rightarrow -\frac{h}{K} (T_S - T_\infty) = -\frac{\dot{g}'}{K} L + C_1$$

$$C_1 = \frac{\dot{g}'}{K} L - \frac{h}{K} (T_S - T_\infty) = \frac{L}{K} \left(\dot{g}' - \frac{h}{L} (T_S - T_\infty) \right)$$

$$dT = -\frac{\dot{g}'}{K} x dx + C_1 dx$$

Integrando:

$$T = -\frac{\dot{g}'}{K} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$CC1 \rightarrow T_0 = C_2$$

Perfil de temperatura:

$$T = -\frac{\dot{g}'}{2K} x^2 + \frac{L}{K} \left(\dot{g}' - \frac{h}{L} (T_s - T_\infty) \right) x + T_0$$

Temperatura superficial:

$$x = L \rightarrow T = T_s$$

$$T_s = -\frac{\dot{g}'}{2K} L^2 + \frac{L}{K} \left(\dot{g}' - \frac{h}{L} (T_s - T_\infty) \right) L + T_0$$

$$T_s = -\frac{\dot{g}' L^2}{2K} + \frac{\dot{g}' L^2}{K} - \frac{hL}{K} (T_s - T_\infty) + T_0$$

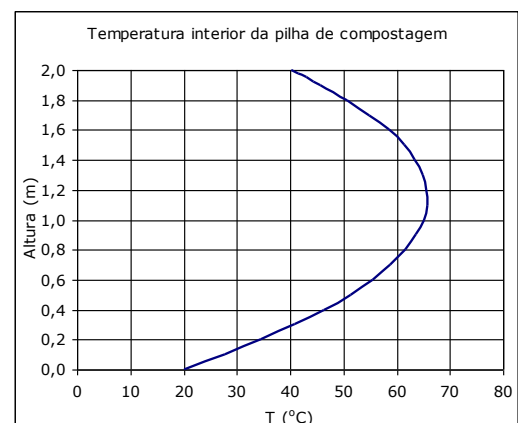
$$T_s = -\frac{\dot{g}' L^2}{2K} + \frac{\dot{g}' L^2}{K} - \frac{hL}{K} T_s + \frac{hL}{K} T_\infty + T_0$$

$$T_s + \frac{hL}{K} T_s = T_s \left(1 + \frac{hL}{K} \right) = -\frac{\dot{g}' L^2}{2K} + \frac{\dot{g}' L^2}{K} + \frac{hL}{K} T_\infty + T_0$$

$$T_s = \frac{1}{\left(1 + \frac{hL}{K} \right)} \left(\frac{\dot{g}' L^2}{K} - \frac{\dot{g}' L^2}{2K} + \frac{hL}{K} T_\infty + T_0 \right)$$

$$T_s = \frac{1}{\left(1 + \frac{hL}{K} \right)} \left(\frac{\dot{g}' L^2}{2K} + \frac{hL}{K} T_\infty + T_0 \right)$$

$$T_s = 40,12 \text{ } ^\circ\text{C}$$



Posição x onde a temperatura é máxima:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right) = -\frac{\dot{q}'}{K}x + C_1 = 0$$

$$-\frac{\dot{q}'}{K}x + \frac{L}{K}\left(\dot{q}' - \frac{h}{L}(T_S - T_\infty)\right) = 0$$

$$x = \frac{L}{\dot{q}'}\left(\dot{q}' - \frac{h}{L}(T_S - T_\infty)\right) = L - \frac{h}{\dot{q}'}(T_S - T_\infty)$$

$$x = L - \frac{h}{\dot{q}'}(T_S - T_\infty) \rightarrow x_{\text{máx}} = 1,14 \text{ m} \rightarrow T_{\text{máx}} = 65,78 \text{ }^\circ\text{C}$$

Cilindro sólido vazado: configuração geométrica de grande importância na engenharia. Condução de calor radial através da parede de tubos e isolantes.

Hipóteses:

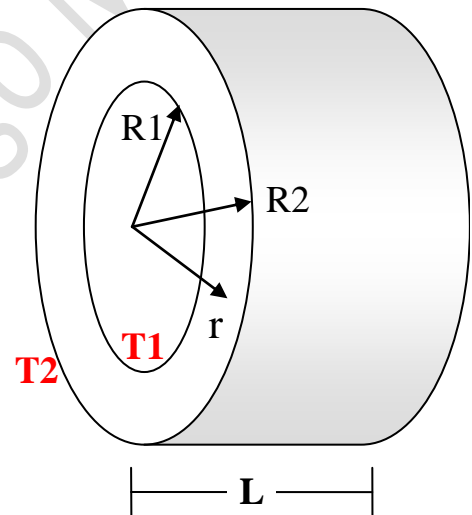
- 1 - regime permanente;
- 2 - condução unidirecional em r ;
- 3 - $K, \rho, C_p = \text{cte}'s$;
- 4 - dimensão z infinita;
- 5 - não há geração de calor interna.

Usaremos a equação da energia em coordenadas cilíndricas. Após as simplificações, temos:

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr}\right)\right) = 0 \rightarrow \left(r \frac{dT}{dr}\right) = \text{constante} = C_1$$

$$dT = C_1 \frac{dr}{r}$$

Integrando: $T = C_1 \ln(r) + C_2$



Para determinação de C_1 e C_2 precisamos de *condições de contorno*, que neste caso são:

1. $r = R_1 \rightarrow T = T_1$
2. $r = R_2 \rightarrow T = T_2$

Assim:

$$CC1 \rightarrow T_1 = C_1 \ln(R_1) + C_2 \rightarrow \boxed{C_2 = T_1 - C_1 \ln(R_1)}$$

$$\begin{aligned} CC2 \rightarrow T_2 &= C_1 \ln(R_2) + C_2 \\ T_2 &= C_1 \ln(R_2) + T_1 - C_1 \ln(R_1) \\ T_2 &= C_1 (\ln(R_2) - \ln(R_1)) + T_1 \\ T_2 - T_1 &= C_1 (\ln(R_2/R_1)) \end{aligned}$$

$$\boxed{\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)}$$

$$\boxed{C_1 = \frac{(T_2 - T_1)}{\ln(R_2/R_1)}}$$

$$\boxed{C_2 = T_1 - \frac{(T_2 - T_1)}{\ln(R_2/R_1)} \ln(R_1)}$$

Portanto:

$$T = \frac{(T_2 - T_1)}{\ln(R_2/R_1)} \ln(r) + T_1 - \frac{(T_2 - T_1)}{\ln(R_2/R_1)} \ln(R_1)$$

$$\boxed{T = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{\ln(R_2/R_1)} \ln(r/R_1)}$$

Perfil de temperatura, em função de r , no interior da parede do cilindro. Note que o perfil não é linear!

Podemos também determinar uma expressão para o fluxo de calor, \dot{q} :

$$\dot{q} = -K \frac{dT}{dr} \rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r} \rightarrow \boxed{\dot{q} = -\left(\frac{K}{r}\right) \frac{(T_2 - T_1)}{\ln(R_2 / R_1)}}$$

Obs.: O fluxo de calor não é constante ao longo da direção r!!!

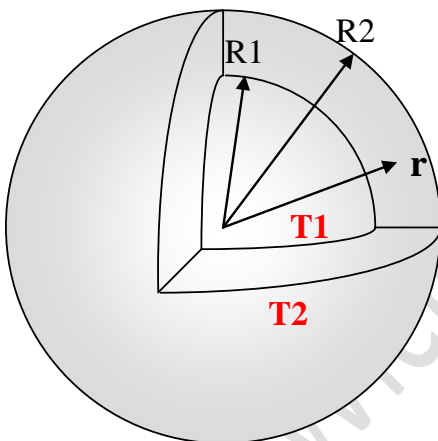
A taxa de transferência de calor (\dot{Q}) pode ser escrita:

$$\dot{Q} = \dot{q}A = \dot{q}(2\pi rL) \rightarrow \boxed{\dot{Q} = -(2\pi KL) \frac{(T_2 - T_1)}{\ln(R_2 / R_1)}}$$

A = área lateral do cilindro.

Obs.: O taxa de transferência de calor é constante ao longo da direção r!!!

Casca esférica (esfera oca):



Hipóteses:

- 1 - regime permanente;
- 2 - condução unidirecional em r;
- 3 - $K, \rho, C_p = \text{cte's}$;
- 4 - não há geração de calor interna.

Usaremos a equação da energia em coordenadas esféricas. Após as simplificações, temos:

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) \right) = 0 \rightarrow \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = C_1 \rightarrow dT = C_1 \frac{dr}{r^2}$$

Integrando: $\boxed{T = -C_1 \left(\frac{1}{r} \right) + C_2}$

Para determinação de C_1 e C_2 precisamos de *condições de contorno*, que neste caso são:

$$1. r = R_1 \rightarrow T = T_1$$

$$2. r = R_2 \rightarrow T = T_2$$

Assim:

$$CC1 \rightarrow T_1 = -C_1 \left(\frac{1}{R_1} \right) + C_2 \rightarrow C_2 = T_1 + C_1 \left(\frac{1}{R_1} \right)$$

$$CC2 \rightarrow T_2 = -C_1 \left(\frac{1}{R_2} \right) + C_2$$

$$T_2 = -C_1 \left(\frac{1}{R_2} \right) + T_1 + C_1 \left(\frac{1}{R_1} \right)$$

$$T_2 = T_1 + C_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \rightarrow C_1 = (T_2 - T_1) / \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$C_1 = \frac{(T_2 - T_1)}{\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)} = \frac{(T_2 - T_1)}{(R_2 - R_1)} R_1 R_2$$

$$C_2 = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{(R_2 - R_1)} R_2$$

$$T = T_1 - \frac{(T_2 - T_1)}{(R_2 - R_1)} R_1 R_2 \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{(T_2 - T_1)}{(R_2 - R_1)} R_2$$

$$\boxed{T = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{(R_2 - R_1)} R_2 \left(1 - \frac{R_1}{r} \right)}$$

Perfil de temperatura, em função de r , no interior da parede da esfera. Note que o perfil não é linear!

Podemos também determinar uma expressão para o fluxo de calor, \dot{q} :

$$\dot{q} = -K \frac{dT}{dr} \rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \rightarrow \dot{q} = -\frac{K}{r^2} \frac{(T_2 - T_1)}{(R_2 - R_1)} R_1 R_2$$

Obs.: O fluxo de calor não é constante ao longo da direção r !!!

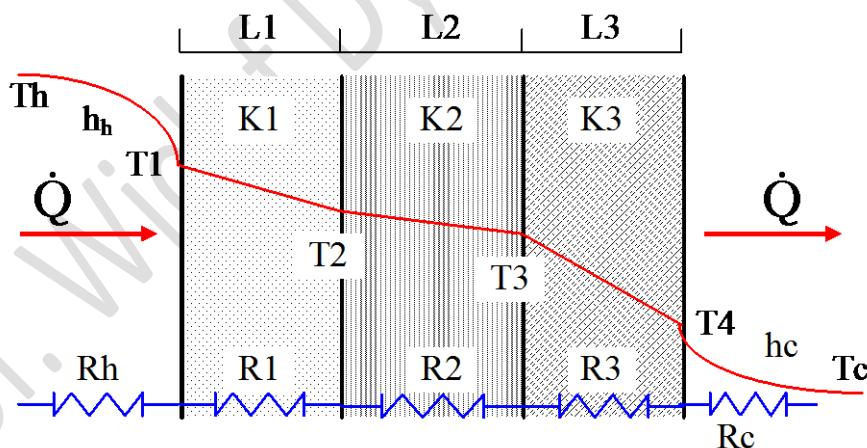
A taxa de transferência de calor (\dot{Q}) pode ser escrita:

$$\dot{Q} = \dot{q}A = \dot{q}(4\pi r^2) \rightarrow \dot{Q} = -4\pi K \frac{(T_2 - T_1)}{(R_2 - R_1)} R_1 R_2$$

A = área superficial da esfera.

Obs.: O taxa de transferência de calor é constante ao longo da direção r !!!

Paredes compostas: diferentes materiais podem se associar formando uma placa plana composta de duas ou mais camadas.



A taxa de transferência de calor (\dot{Q}) é a mesma para qualquer seção. Para a condução de calor através das camadas sólidas, podemos escrever:

$$\dot{Q} = \frac{K_1 A}{L_1} (T_1 - T_2) \quad \text{e} \quad \dot{Q} = \frac{K_2 A}{L_2} (T_2 - T_3) \quad \text{e} \quad \dot{Q} = \frac{K_3 A}{L_3} (T_3 - T_4)$$

Para a transferência de calor convectiva nas duas superfícies, temos:

$$\dot{Q} = h_h A (T_h - T_1) \text{ e } \dot{Q} = h_c A (T_4 - T_c)$$

$$T_h - T_1 = \dot{Q} \frac{1}{Ah_h}$$

$$T_1 - T_2 = \dot{Q} \frac{L_1}{AK_1}$$

$$T_2 - T_3 = \dot{Q} \frac{L_2}{AK_2}$$

$$T_3 - T_4 = \dot{Q} \frac{L_3}{AK_3}$$

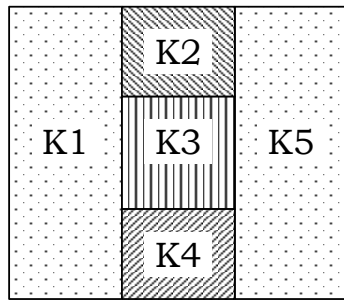
$$T_4 - T_c = \dot{Q} \frac{1}{Ah_c}$$

$$T_h - T_c = \dot{Q} \left(\frac{1}{Ah_h} + \frac{L_1}{AK_1} + \frac{L_2}{AK_2} + \frac{L_3}{AK_3} + \frac{1}{Ah_c} \right)$$

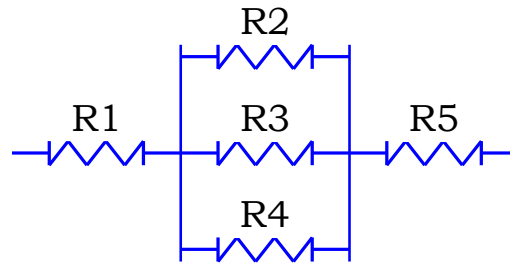
$$\dot{Q} = \frac{T_h - T_c}{\frac{1}{Ah_h} + \frac{L_1}{AK_1} + \frac{L_2}{AK_2} + \frac{L_3}{AK_3} + \frac{1}{Ah_c}} = \frac{T_h - T_c}{\sum R_i}$$

O termo, $\frac{1}{Ah}$, representa uma resistência térmica devido à convecção no fluido, e, $\frac{L}{AK}$, representa uma resistência térmica devido à condução no sólido.

Por analogia entre o fluxo de calor e a corrente elétrica, podemos dizer que as resistências térmicas estão associadas em série. Para associação de resistências em paralelo:



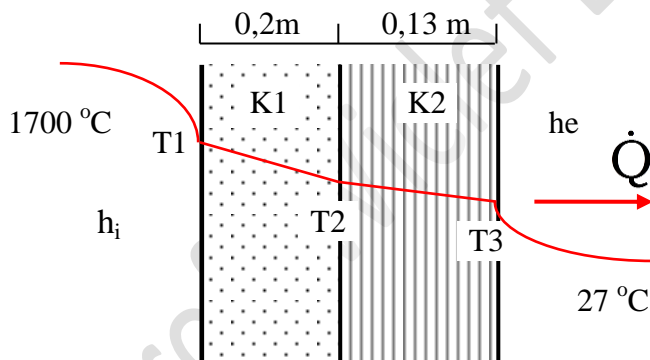
Por analogia:



$$\Sigma R_i = R_1 + R_{eq} + R_5$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

Ex.: A parede de um forno é constituída de duas camadas: 0,20 m de tijolo refratário ($K_1 = 1,2 \text{ kcal/h.m.}^\circ\text{C}$) e 0,13 m de tijolo isolante ($K_2 = 0,15 \text{ kcal/h.m.}^\circ\text{C}$). A temperatura interna é de 1.700°C e o $h_{\text{interno}} = 58 \text{ kcal/h.m}^2.\text{}^\circ\text{C}$. A temperatura externa é de 27°C e o $h_{\text{externo}} = 10 \text{ kcal/h.m}^2.\text{}^\circ\text{C}$. Estime o fluxo de calor e as temperaturas superficiais, interna e externa.



$$\begin{aligned} K_1 &= 1,2 \text{ kcal/h.m.}^\circ\text{C} \\ K_2 &= 0,15 \text{ kcal/h.m.}^\circ\text{C} \\ h_i &= 58 \text{ kcal/h.m}^2.\text{}^\circ\text{C} \\ h_e &= 10 \text{ kcal/h.m}^2.\text{}^\circ\text{C} \\ \dot{Q} &= ?; T_1 = ?; T_3 = ? \end{aligned}$$

A partir da equação para parede composta:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Q}}{A} &= \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{h_i} + \frac{L_1}{K_1} + \frac{L_2}{K_2} + \frac{1}{h_e}} = \frac{1700 - 27}{\frac{1}{58} + \frac{0,2}{1,2} + \frac{0,13}{0,15} + \frac{1}{10}} \\ \frac{\dot{Q}}{A} &= 1.454 \text{ kcal/h.m}^2 \end{aligned}$$

As temperaturas superficiais:

$$\frac{\dot{Q}}{A} = h_i(T_i - T_1) \rightarrow 1454 = 58(1700 - T_1) \rightarrow T_1 = 1.675 \text{ } ^\circ\text{C}$$

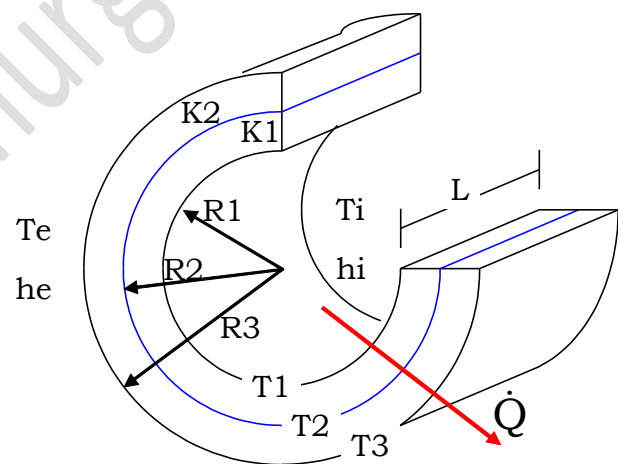
$$\frac{\dot{Q}}{A} = h_e(T_3 - T_e) \rightarrow 1454 = 10(T_3 - 27) \rightarrow T_3 = 172,4 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Sem isolamento:

$$\frac{\dot{Q}}{A} = 5.892 \text{ kcal/h.m}^2$$

$$T_1 = 1.598 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ e } T_3 = 616 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Cilindros concêntricos:
transmissão de calor radial através de cilindros concêntricos, por exemplo, um tubo isolado que transporta um fluido quente, exposto ao ambiente mais frio.



A taxa de transferência de calor através de cada seção é a mesma:

$$\dot{Q} = 2\pi R_1 L h_i (T_i - T_1)$$

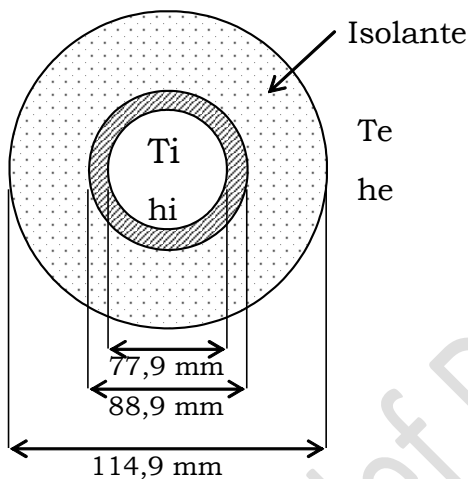
$$\dot{Q} = (2\pi K_1 L) \frac{(T_1 - T_2)}{\ln(R_2 / R_1)}$$

$$\dot{Q} = (2\pi K_2 L) \frac{(T_2 - T_3)}{\ln(R_3 / R_2)}$$

$$\dot{Q} = 2\pi R_3 L h_e (T_3 - T_e)$$

$$\dot{Q} = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{2\pi R_1 L h_i} + \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi K_1 L} + \frac{\ln(R_3/R_2)}{2\pi K_2 L} + \frac{1}{2\pi R_3 L h_e}}$$

Ex.: Estimar a taxa de transferência de calor, por metro linear, de um tubo com diâmetro externo de 88,9 mm e interno de 77,9 mm, com $K_1 = 37$ kcal/h.m. $^{\circ}$ C, coberto com 13 mm de isolante com $K_2 = 0,16$ kcal/h.m. $^{\circ}$ C. O tubo transporta um fluido a 150 $^{\circ}$ C com $h_i = 195$ kcal/h.m 2 . $^{\circ}$ C e está exposto ao ambiente com $T=27$ $^{\circ}$ C e $h_e = 20$ kcal/h.m 2 . $^{\circ}$ C. Qual seria a perda de calor sem isolamento?



$$\begin{aligned} K_1 &= 37 \text{ kcal/h.m.}^{\circ}\text{C} \\ K_2 &= 0,16 \text{ kcal/h.m.}^{\circ}\text{C} \\ h_i &= 195 \text{ kcal/h.m}^2\text{.}^{\circ}\text{C} \\ h_e &= 20 \text{ kcal/h.m}^2\text{.}^{\circ}\text{C} \\ T_i &= 150 \text{ }^{\circ}\text{C} \\ T_e &= 27 \text{ }^{\circ}\text{C} \\ \frac{\dot{Q}}{L} &= ? \end{aligned}$$

$$R_1 = 38,95 \text{ mm} = 0,0390 \text{ m}$$

$$R_2 = 44,45 \text{ mm} = 0,0444 \text{ m}$$

$$R_3 = 57,45 \text{ mm} = 0,0574 \text{ m}$$

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{2\pi R_1 h_i} + \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi K_1} + \frac{\ln(R_3/R_2)}{2\pi K_2} + \frac{1}{2\pi R_3 h_e}}$$

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{150 - 27}{\frac{1}{2\pi 0,039 \times 195} + \frac{\ln(44,45/38,95)}{2\pi 37} + \frac{\ln(57,45/44,45)}{2\pi 0,16} + \frac{1}{2\pi 0,0574 \times 20}}$$

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{123}{\frac{1}{47,78} + \frac{0,132}{232,48} + \frac{0,256}{1,01} + \frac{1}{7,21}} = 296,5 \text{ kcal/h.m}$$

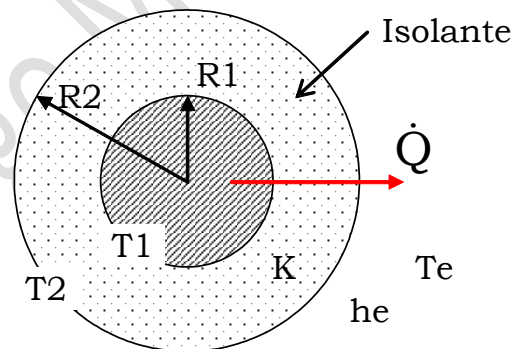
Sem isolamento:

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{150 - 27}{\frac{1}{2\pi \cdot 0,039 \times 195} + \frac{\ln(44,45/38,95)}{2\pi \cdot 37} + \frac{1}{2\pi \cdot 0,0444 \times 20}}$$

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{123}{\frac{1}{47,78} + \frac{0,132}{232,48} + \frac{1}{5,58}} = 612,8 \text{ kcal/h.m}$$

Cerca de 2 vezes mais que com isolamento!!

Espessura crítica de isolação: o acréscimo de isolação à parte externa de tubos ou fios nem sempre reduz a transferência de calor. Para um fio sólido isolado, podemos escrever:



$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_e}{\frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi KL} + \frac{1}{2\pi R_2 L h_e}} = \frac{2\pi KL(T_1 - T_e)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{K}{R_2 h_e}}$$

Para um valor fixo de R_1 :

$$\frac{d\dot{Q}}{dR_2} = \frac{-2\pi KL(T_1 - T_e)[(1/R_2) - (K/h_e R_2^2)]}{\left(\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{K}{R_2 h_e}\right)^2} = 0$$

O raio para a máxima transferência de calor, chamado de raio crítico, R_C , será:

$$R_C = \frac{K}{h_e}$$

Ex.: Um cabo elétrico de 20 mm de diâmetro, isolado com borracha ($K = 0,14 \text{ kcal/hm}^\circ\text{C}$), está ao ar livre ($h_e = 7,32 \text{ kcal/h.m}^2.\text{}^\circ\text{C}$; $T_e = 20 \text{ }^\circ\text{C}$). Assumindo-se que a superfície do cabo esteja a $65 \text{ }^\circ\text{C}$, estime o calor dissipado e a espessura crítica de isolamento.

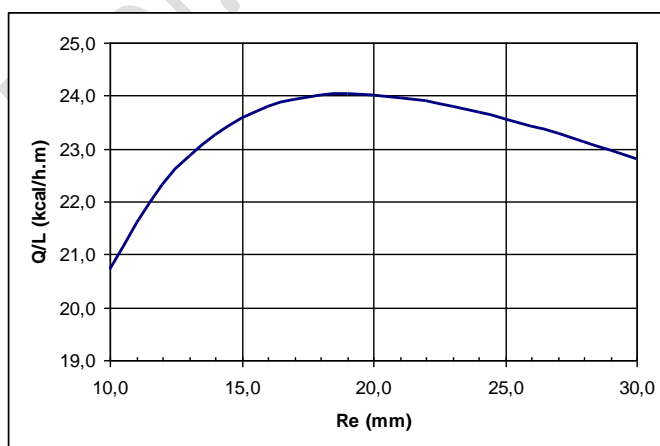
$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{2\pi K(T_1 - T_e)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{K}{R_2 h_e}} = \frac{2\pi 0,14(65 - 20)}{\ln\left(\frac{R_2}{(0,02/2)}\right) + \frac{0,14}{7,32 R_2}}$$

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{39,58}{\ln\left(\frac{R_2}{(0,02/2)}\right) + \frac{0,0191}{R_2}}$$

$$\text{Raio crítico} \rightarrow R_c = \frac{K}{h_e} = \frac{0,14}{7,32} = 0,0191 \text{ m}$$

$$R_c = 19,1 \text{ mm}$$

O raio do fio é de 10 mm, ou seja, menor que o raio crítico de 19,1 mm. Neste caso, qualquer espessura de recobrimento do fio causará um aumento na transferência de calor e não uma diminuição. A camada de borracha está funcionando como um "dissipador" de calor e não como um isolante térmico.



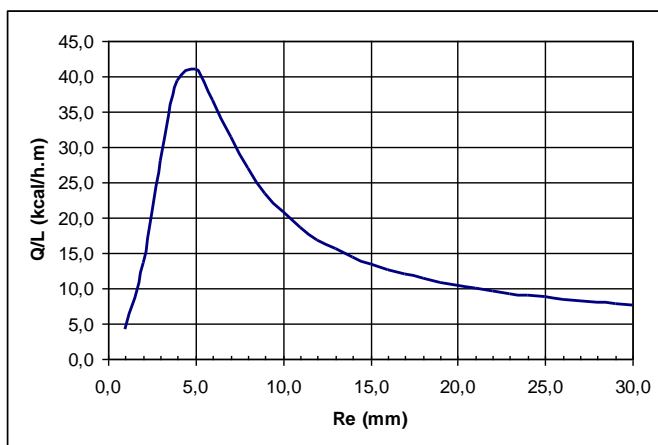
Re(mm)	Re(m)	Q/L
10,0	0,0100	20,72
15,0	0,0150	23,58
19,0	0,0190	24,03
20,0	0,0200	24,01
25,0	0,0250	23,56
30,0	0,0300	22,81

Para redução do calor dissipado, poderíamos isolar o fio com lã de vidro, $K = 0,034 \text{ kcal/hm}^\circ\text{C}$:

$$\text{Raio crítico} \rightarrow R_c = \frac{K}{h_e} = \frac{0,034}{7,32} = 0,00464\text{m}$$

$$R_c = 4,64 \text{ mm}$$

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{9,61}{\ln\left(\frac{R_2}{(0,02/2)}\right) + \frac{0,00464}{R_2}}$$



Re(mm)	Re(m)	Q/L
1,0	0,0010	4,11
4,0	0,0040	39,43
5,0	0,0050	40,92
10,0	0,0100	20,71
19,0	0,0190	10,85
20,0	0,0200	10,39
25,0	0,0250	8,72
30,0	0,0300	7,67

Neste caso, o raio do fio é maior que o raio crítico de 4,64 mm, assim, qualquer espessura de recobrimento do fio causará uma diminuição na transferência de calor.

Além do critério do raio crítico, a seleção da espessura de isolamento e do material isolante requer uma análise de custos.

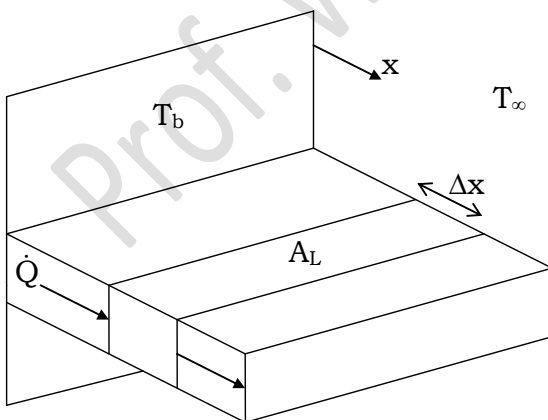
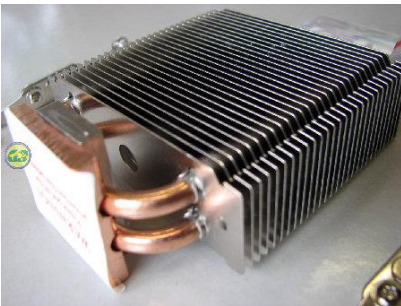
Coefficiente global (U): em algumas situações é interessante definirmos um coeficiente global de transferência de calor, englobando todas as resistências térmicas:

$$\frac{1}{UA} = \frac{1}{Ah_h} + \frac{L_1}{AK_1} + \frac{L_2}{AK_2} + \frac{L_3}{AK_3} + \frac{1}{Ah_c}$$

$$\dot{Q} = UA(T_h - T_c) = \frac{(T_h - T_c)}{\frac{1}{UA}}$$

Na prática, muitas vezes um valor de U é fornecido para uma determinada situação de transferência de calor, sem mencionar os termos da convecção e condução que compõem esse valor.

Superfícies estendidas (aletas): a taxa de transferência de calor pode ser aumentada pelo aumento da superfície sobre a qual a transferência de calor ocorre. Uma aleta pode fazer exatamente isso, aumentando as superfícies da parede para o meio circundante.



Aplicando-se o conceito da conservação da energia (1ª lei da termodinâmica):

$$\dot{q}_{x|x} A_s = \dot{q}_{x|x+\Delta x} A_s - h A_L (T - T_\infty)$$

$$\dot{q}_{x|x} A_s = \dot{q}_{x|x+\Delta x} A_s - h P \Delta x (T - T_\infty)$$

A_s = área de seção da aleta;
 P = perímetro.

Dividindo-se a expressão acima por Δx , e tomando-se o limite quando Δx tende a zero, temos:

$$A_S \left(\frac{d\dot{q}_x}{dx} \right) - hP(T - T_\infty) = 0$$

$$A_S K \left(\frac{d^2 T}{dx^2} \right) - hP(T - T_\infty) = 0$$

$$\boxed{\left(\frac{d^2 T}{dx^2} \right) - \frac{hP}{KA_S} (T - T_\infty) = 0}$$

A solução da equação acima depende das condições de contorno adotadas. Para o caso de aletas finas e longas, podemos assumir que a temperatura na extremidade é próxima da temperatura do ambiente.

Assim:

1. $x = 0 \rightarrow T = T_b$
2. $x \rightarrow \infty \rightarrow T = T_\infty$

A solução da equação diferencial torna-se:

$$(T - T_\infty) = (T_b - T_\infty) \exp\left(-\sqrt{\frac{hP}{KA_S}} x\right)$$

O calor dissipado pela aleta pode ser calculado:

$$\dot{Q} = \sqrt{hPKA_S} (T_b - T_\infty)$$

Sem a aleta, o calor dissipado seria:

$$\dot{Q}_{\text{semaleta}} = hA_S (T_b - T_\infty)$$

A eficácia da aleta pode ser escrita:

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{\text{semaleta}}} = \sqrt{\frac{KP}{hA_S}}$$

Obs.: o coeficiente de transferência de calor convectivo, h , não seria, necessariamente, o mesmo, pois ele depende também da geometria do sistema!

1.2 - Condução de Calor Unidirecional em Regime Transiente.

Neste item consideraremos situações de transferência de calor por condução nas quais a temperatura é função da posição e do tempo, sem geração interna.

Nosso sistema será um corpo no qual a condução prevalece sobre os demais mecanismos de transferência, como em fluidos de alta viscosidade e em sólidos.

Em um sólido a transferência de energia depende das resistências internas e externas. Os casos limites são: resistência interna desprezível; resistência externa desprezível; resistências não desprezíveis.

A equação geral da condução, com $\alpha = \text{cte}$ torna-se:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

Obs.: O operador Laplaciano no espaço euclidiano n -dimensional é definido como o divergente do gradiente:

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

O laplaciano é a soma de todas as derivadas parciais simples de segunda ordem. O caso particular em \mathbf{R}^3 , onde as componentes são denotadas por \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} , temos:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , assume a forma:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

Em coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) , assume a forma:

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Para um sistema unidirecional, a equação geral se reduz (coordenadas retangulares):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)$$

Muitas soluções da equação acima foram obtidas para diferentes condições iniciais e de contorno.

Sistemas com resistência interna desprezível: em alguns casos, podemos admitir que a resistência interna do corpo à transmissão de calor é pequena se comparada à resistência externa (meio circundante/fluido).

Assim, a variação da temperatura em qualquer ponto no interior do sistema pode ser negligenciada, ou seja, a temperatura dentro do sistema é "quase" uniforme.

Para o resfriamento de um corpo, a transferência de calor convectiva entre o fluido e o corpo pode ser escrita:

$$-mC_p\Delta T = \bar{h}A(T - T_\infty)\Delta t$$

Varição da energia interna do corpo durante Δt

Energia trocada com o fluido durante Δt

Em que:

m = massa do corpo;

C_p = calor específico;

\bar{h} = coeficiente de transferência de calor;

A = área superficial;

T_∞ = temperatura do fluido;

T = temperatura superficial do corpo (neste caso é a mesma temperatura do interior do sólido!!)

Podemos escrever:

$$-\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\bar{h}A}{mC_p}(T - T_\infty)$$

Tomando o limite para $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\bar{h}A}{mC_p}(T - T_\infty)$$

A expressão acima é a equação governante que descreve a temperatura em função do tempo. Equação de primeira ordem com condição inicial:

$$T(t=0) = T_0$$

Integrando:

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{(T - T_\infty)} = -\frac{\bar{h}A}{mC_p} \int_0^t dt$$

$$\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b} \ln(a + bx)$$

$$\ln\left(\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right) = -\frac{\bar{h}A}{mC_p} t \rightarrow \left(\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right) = \exp\left(-\frac{\bar{h}A}{mC_p} t\right)$$

Podemos expressar o resultado anterior em termos dos grupos adimensionais:

$$\text{Número de Biot (Bi)} = \frac{\bar{h}L}{K} h$$

$$\text{Módulo de Fourier (Fo)} = \frac{\alpha t}{L^2}$$

$$\Theta = \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right) \text{ (adimensional de temperatura)}$$

E dos seguintes parâmetros:

$$L = \frac{\text{Vol}}{A} \text{ (dimensão característica)}$$

$$\alpha = \frac{K}{\rho C_p} \text{ (difusividade térmica)}$$

$$m = \rho \cdot \text{Vol}$$

Assim:

$$\Theta = \exp(-\text{Bi} \cdot \text{Fo})$$

A taxa de transferência de calor entre o corpo e o fluido:

$$\dot{Q} = hA(T - T_{\infty}) = hA(T_0 - T_{\infty}) \exp\left(-\frac{hA}{mC_p} t\right)$$

Número de Biot: o fluxo de calor convectivo entre o fluido e o corpo pode ser escrito:

$$\dot{q} = h(T_S - T_{\infty})$$

O fluxo de calor condutivo na superfície:

$$\dot{q} = -K \left. \frac{dT}{dL} \right|_{\text{na superfície}}$$

Assim:

$$\bar{h}(T_S - T_{\infty}) = -K \left. \frac{dT}{dL} \right|_{\text{na superfície}} \approx K \frac{(T_i - T_S)}{L}$$

T_i = temperatura interna;

T_S = temperatura da superfície.

$$\bar{h}(T_S - T_\infty) \approx K \frac{(T_i - T_S)}{L}$$

$$\frac{(T_i - T_S)}{(T_S - T_\infty)} \cong \frac{\bar{h}L}{K} = \text{Número de Biot (Bi)}$$

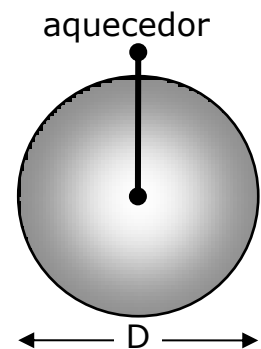
$$\frac{(T_i - T_S)}{(T_S - T_\infty)} \cong \frac{\bar{h}L}{K} = \frac{L}{\frac{KA}{1}} = \frac{\text{resistência condutiva}}{\text{resistência convectiva}}$$

Se Bi for pequeno ($Bi \leq 0,1$), o gradiente interno de temperatura deve ser pequeno em comparação à diferença $(T_S - T_\infty)$ e a transferência de calor é controlada pela convecção externa à superfície.

Para esfera ou cilindro longo, a dimensão característica é o raio!!!

Ex.: Uma esfera de ferro com diâmetro de 15 cm, inicialmente a 20 °C, é exposta, subitamente, a um ambiente a 30 °C. Neste mesmo instante, um sistema interno de aquecimento é ligado, fornecendo 50 W. Encontre uma expressão para a variação da temperatura interna da esfera.

Dados: $\rho = 7870 \text{ kg/m}^3$; $C_p = 450 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$;
 $K = 72 \text{ W/m}^\circ\text{C}$; $h = 5,2 \text{ W/}^\circ\text{Cm}^2$.



$$\text{Número de Biot} = \frac{hR}{K} = \frac{5,2 \times 0,075}{72} = 0,0054$$

$$\text{Biot} = 0,0054 \text{ (Bi} < 0,1 \text{)}$$

A transferência de calor convectiva entre o fluido e o corpo pode ser escrita (aquecimento):

$$mC_p\Delta T = -hA(T - T_\infty)\Delta t + \dot{G}\Delta t$$

Como T é menor que T_∞ , o sinal negativo corrige o valor do calor.

\dot{G} = taxa de geração de energia por unidade de tempo (constante) [J/s];

Podemos escrever:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{hA}{mC_p}(T - T_\infty) + \frac{\dot{G}}{mC_p}$$

$$T(t=0) = T_0$$

Podemos reescrever a equação acima:

$$\frac{dT}{dt} = a(T - T_\infty) + b = aT - aT_\infty + b = aT + c$$

$$\frac{dT}{dt} = aT + c$$

Com as constantes:

$$a = -\frac{hA}{mC_p}; \quad b = \frac{\dot{G}}{mC_p}; \quad c = -aT_\infty + b$$

Integrando: $\int_{T_0}^T \frac{dT}{aT + c} = \int_0^t dt$

$$\frac{1}{a} \ln(aT + c) \Big|_{T_0}^T = t$$

$$\frac{1}{a} [\ln(aT + c) - \ln(aT_0 + c)] = t$$

$$\frac{1}{a} \ln\left(\frac{aT + c}{aT_0 + c}\right) = t \rightarrow \frac{aT + c}{aT_0 + c} = \exp(at)$$

A equação acima se torna:

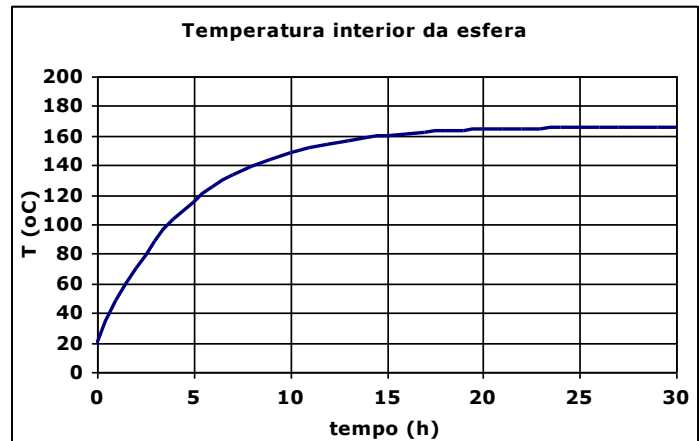
$$T = T_{\infty} + \frac{\dot{G}}{hA} - \left[(T_{\infty} - T_0) + \frac{\dot{G}}{hA} \right] \exp\left(-\frac{hA}{\rho V C_p} t\right)$$

Com os dados:

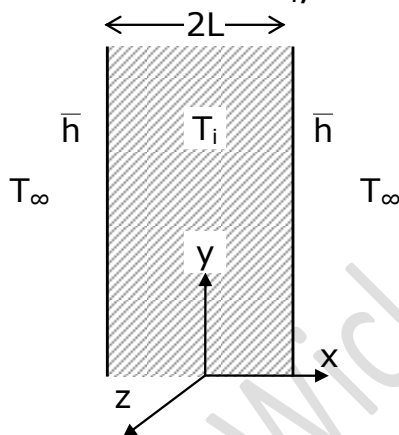
$$T_{\infty} = 30^{\circ}\text{C}$$

$$T_0 = 20^{\circ}\text{C}$$

$$\dot{G} = 50 \text{ W}$$



Placa plana sólida de espessura $2L$: considere uma placa inicialmente a T_i , subitamente, exposta ao ambiente com T_{∞} :



Hipóteses:

- 1 - regime transiente;
- 2 - condução unidirecional em x ;
- 3 - $K, \rho, C_p = \text{cte}'s$;
- 4 - dimensões y e z infinitas;
- 5 - não há geração de calor interna.

Assim, a equação governante para este caso específico torna-se:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \left(\frac{d^2T}{dx^2} \right) = \alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right)$$

Com as seguintes condições de contorno e inicial:

CI. $t = 0 \rightarrow T = T_i$ (p/ todo x)

CC1. $x = 0 \rightarrow \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0$ [p/ $t > 0$] (condição de simetria)

CC2. $x = L \rightarrow -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = \bar{h}(T|_{x=L} - T_\infty)$

A solução para a equação acima pode ser encontrada na forma de diagramas:

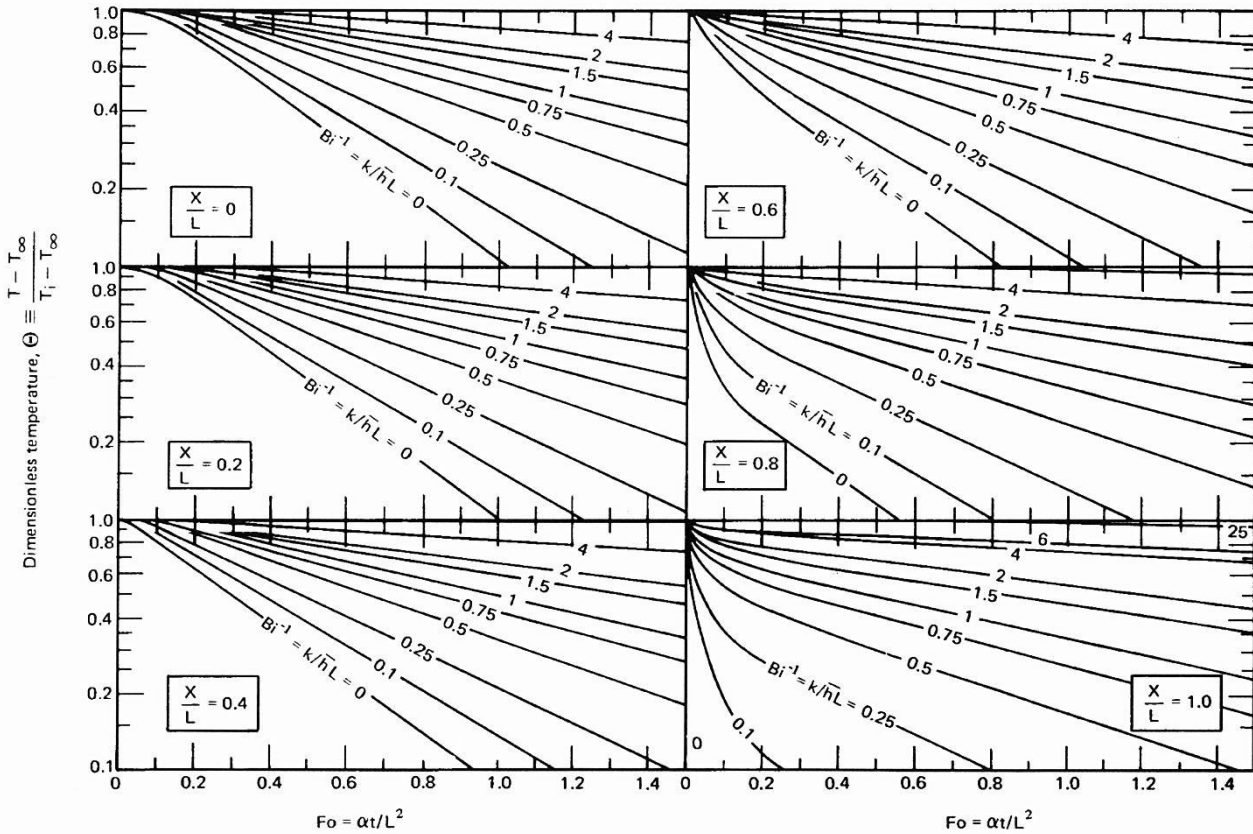


Figure 5.7 The transient temperature distribution in a slab at six positions: $x/L = 0$ is the center, $x/L = 1$ is one outside boundary.

(extraído de: A HEAT TRANSFER TEXTBOOK - Lienhard)

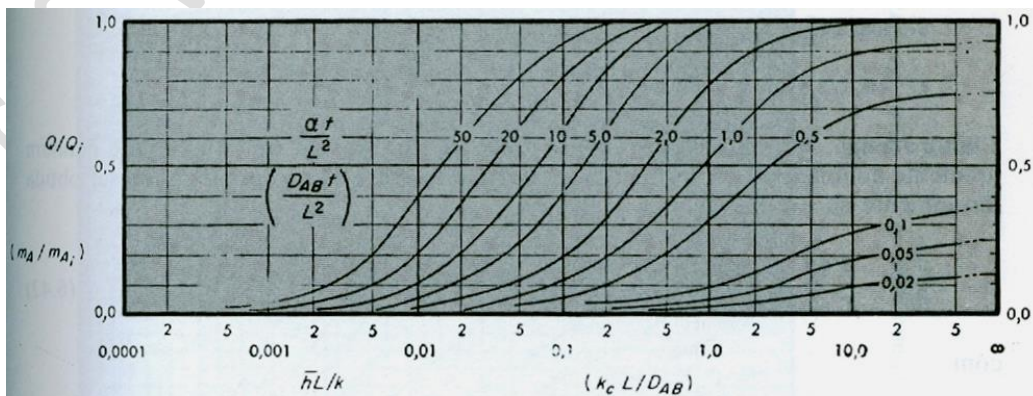



Fig. 6.10 Escoamento de calor adimensional (e escoamento de massa) de/ou para uma placa infinita de espessura $2L$. (De H. Gröber, S. Erk, e U. Grigull, "Grundgesetze der Wärmeübertragung" 3.ª ed., Springer-Verlag, 1955, com autorização.)

(extraído de: Fenômenos de Transporte - Sissom e Pitts)

Ex. Uma maçã, aproximadamente esférica, com 10 cm de diâmetro está a 30 °C e, subitamente, é colocada em um refrigerador a 5 °C. Qual será a temperatura do centro da maçã após 2,5 h? Quanto tempo para o centro da maçã atingir 10 °C? Qual o calor transferido até esse momento? Assumir que a maçã tem aproximadamente as propriedades da água. O coeficiente de transferência de calor $h = 6 \text{ W/m}^2\text{K}$.

	Água (20 °C)	$K = 0,603 \text{ W/mK}$
		$\rho = 997,6 \text{ kg/m}^3$
		$C_p = 4.180 \text{ J/kgK}$

Dados:	$D = 10 \text{ cm}$	$T_i = 30 \text{ °C}$	$T_\infty = 5 \text{ °C}$	$h = 6 \text{ W/m}^2\text{K}$
--------	---------------------	-----------------------	---------------------------	-------------------------------

Para uma esfera o número de Biot = hR/K :

$$Bi = 6 \times (0,05)/0,603 = 0,50 > 0,1$$

Vamos utilizar os diagramas de temperatura transiente para esfera.

a) $t = 2,5 \text{ h} \rightarrow T_{\text{central}} = ?$

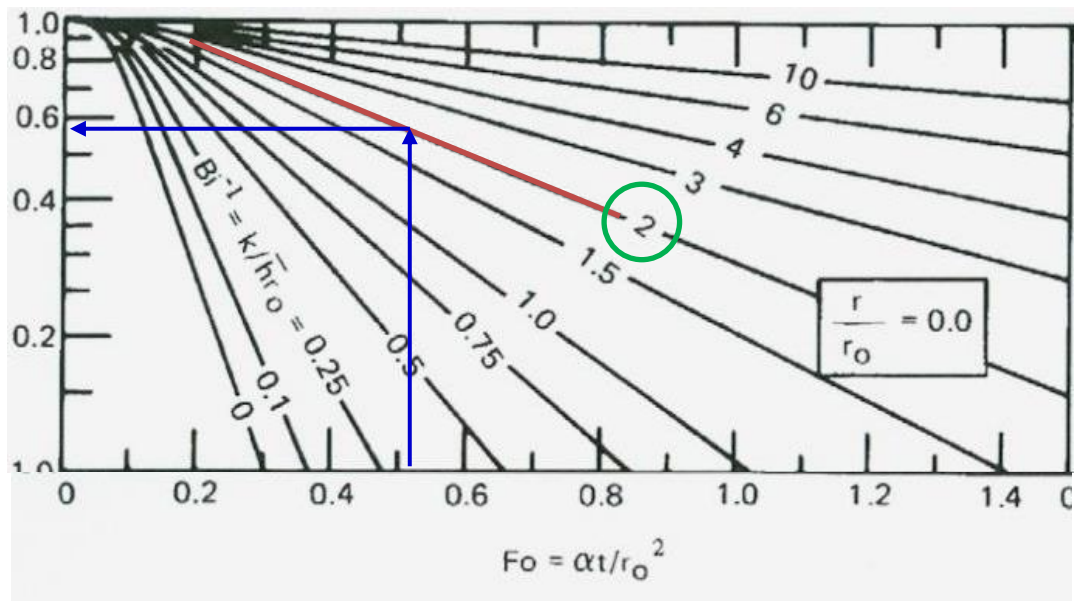
$$\alpha = \frac{K}{\rho C_p} \text{ (difusividade térmica)}$$

$$Fo = \alpha t/R^2 = \left(\frac{0,603}{997,6 \times 4180} \right) 2,5 \times 3600 / (0,05)^2 = 0,52$$

$$Bi^{-1} = \frac{K}{hR} = 0,603 / (6 \times 0,05) = 2,0$$

A temperatura central $r/R = 0$:

$$\frac{T-T_{\infty}}{T_i-T_{\infty}}$$



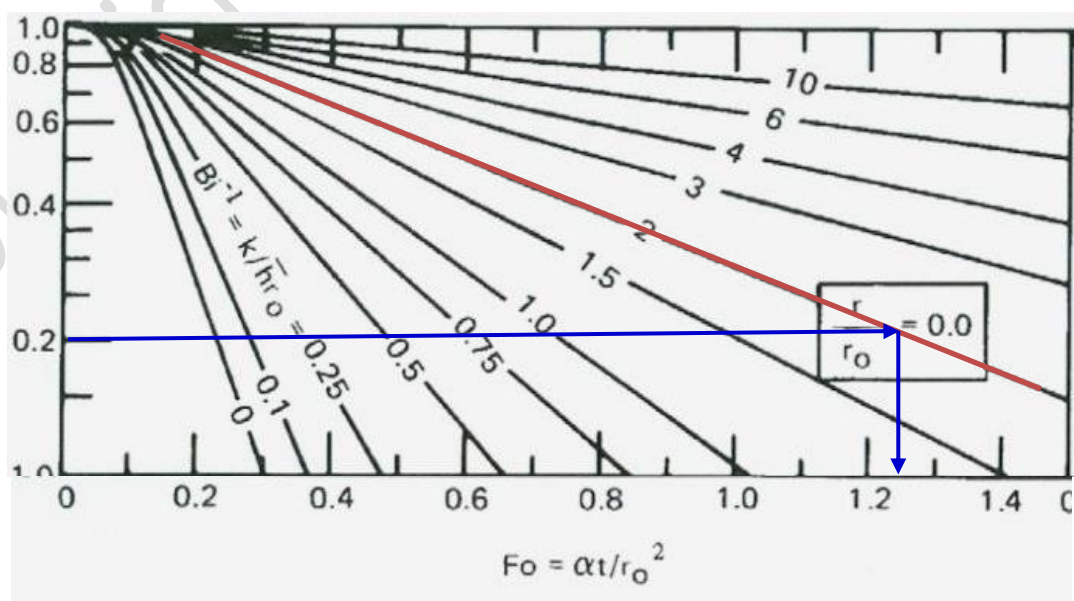
Do gráfico:

$$\frac{T-T_{\infty}}{T_i-T_{\infty}} \approx 0,58 \rightarrow \frac{T-5}{30-5} \approx 0,58 \rightarrow T_c = 19,5 \text{ } ^\circ\text{C}$$

b) $T_{\text{central}} = 10 \text{ } ^\circ\text{C} \rightarrow t = ?$

$$\frac{T-T_{\infty}}{T_i-T_{\infty}} = \frac{10-5}{30-5} = 0,2$$

$$\frac{T-T_{\infty}}{T_i-T_{\infty}}$$

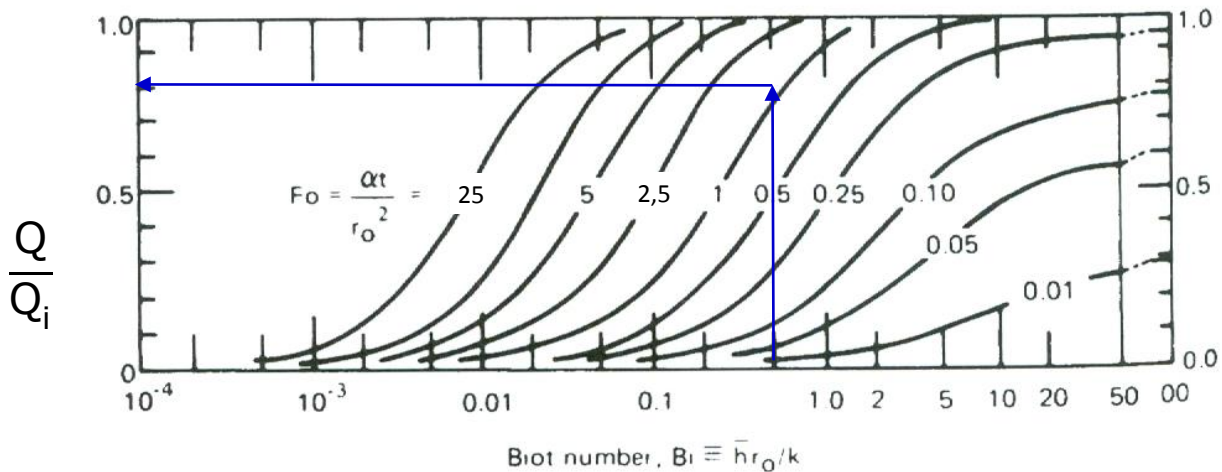


Do gráfico: $Fo \approx 1,25 \rightarrow t = R^2 Fo / \alpha$

$$T = (0,05)^2 \times 1,25 / \left(\frac{0,603}{997,6 \times 4180} \right) = 21.610 \text{ s} = 6,0 \text{ h}$$

c) Qual o calor transferido após 6h?

$$Fo = 1,25 \quad Bi = 0,5$$



c.) Sphere, of radius, r_o

Do gráfico: $Q/Q_i \approx 0,8$

$$Q_i = mC_p(T_i - T_\infty) = \rho(4/3)\pi R^3 C_p(T_i - T_\infty)$$

$$Q_i = 997,6(4/3)\pi(0,05)^3 4.180(30 - 5) = 54.585 \text{ J}$$

$$Q = 0,8 \times 54.585 = 43.668 \text{ J} = 43,7 \text{ kJ}$$

Ex. Um longo cilindro de cobre com 18 mm de diâmetro, inicialmente a 150 °C, é subitamente imerso em: a) água a 40 °C, com $h = 70 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$; b) ar a 40 °C, com $h = 10 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$. Qual o tempo para a temperatura do fio alcançar 100 °C?

Cobre	$K = 322 \text{ kcal/hm}^\circ\text{C}$
	$\rho = 8.945 \text{ kg/m}^3$
	$C_p = 0,091 \text{ kcal/kg}^\circ\text{C}$

Cilindro longo o número de Biot = hR/K .

a) água $\rightarrow h = 70 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$

$$Bi = 70 \times (0,018/2)/322 = 0,002 \ll 0,1$$

Sistemas com resistência interna desprezível:

$$\left(\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right) = \exp\left(-\frac{hA}{mC_p} t \right)$$

Para um longo cilindro de comprimento z :

A (área superficial) = $2\pi Rz$

Vol (volume) = $\pi R^2 z$

$$\left(\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right) = \exp\left(-\frac{hA}{\rho \text{Vol} C_p} t \right) = \exp\left(-\frac{4h}{\rho D C_p} t \right)$$

$$\frac{100-40}{150-40} = \exp\left(\frac{-4 \times 70}{8945 \times 0,018 \times 0,091} t \right)$$

$$0,545 = \exp(-19,1 t) \rightarrow \ln(0,545) = -19,1 t$$

$$t = 115 \text{ s} \approx 2 \text{ min}$$

b) ar $\rightarrow h = 10 \text{ kcal/ m}^2\text{h}^\circ\text{C}$

$$Bi = 10 \times (0,018/2)/322 = 0,0003 \ll 0,1$$

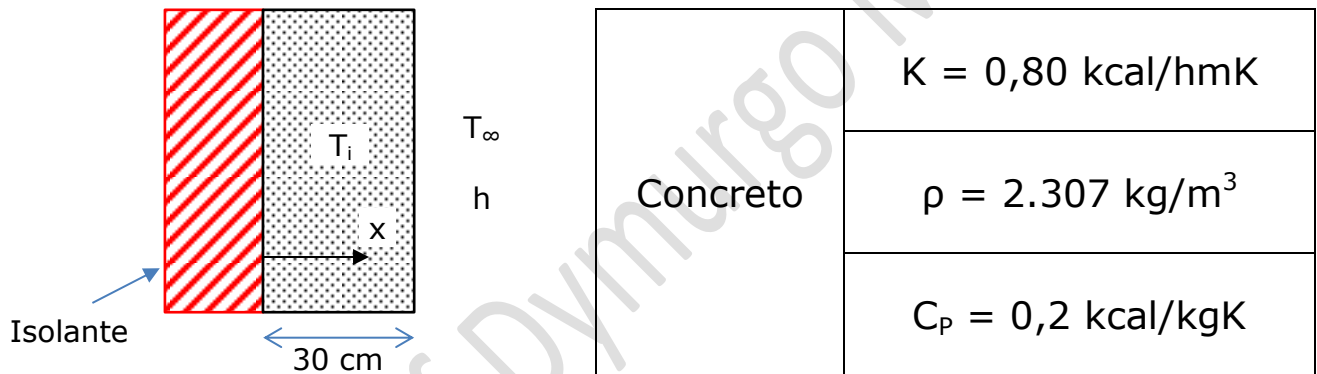
$$\frac{100-40}{150-40} = \exp\left(\frac{-4 \times 10}{8945 \times 0,018 \times 0,091} t \right)$$

$$0,545 = \exp(-2,73 t) \rightarrow \ln(0,545) = -2,73 t$$

$$t = 800 \text{ s} \approx 13 \text{ min}$$

Vê-se que o resfriamento na água é mais rápido, pois o "h" é maior.

Ex. Uma parede de concreto com 30 cm de espessura está a 40 °C e, subitamente, uma de suas faces é exposta a uma temperatura de 900 °C. A outra face está isolada termicamente. O coeficiente de transmissão de calor no lado não isolado é $h = 25 \text{ kcal/hm}^2\text{K}$. Determine: a) o tempo para a face isolada atingir 600 °C; b) após esse tempo, qual a temperatura a 12 cm da face não isolada.



$T_i = 40 \text{ }^\circ\text{C}$	$T_\infty = 900 \text{ }^\circ\text{C}$	$h = 25 \text{ kcal/hm}^2\text{K}$
-----------------------------------	---	------------------------------------

Vamos assumir que a face isolada corresponde ao plano central de uma placa de espessura $2L$, portanto para $x = 0$, teremos $dT/dx = 0$ (isolamento perfeito).

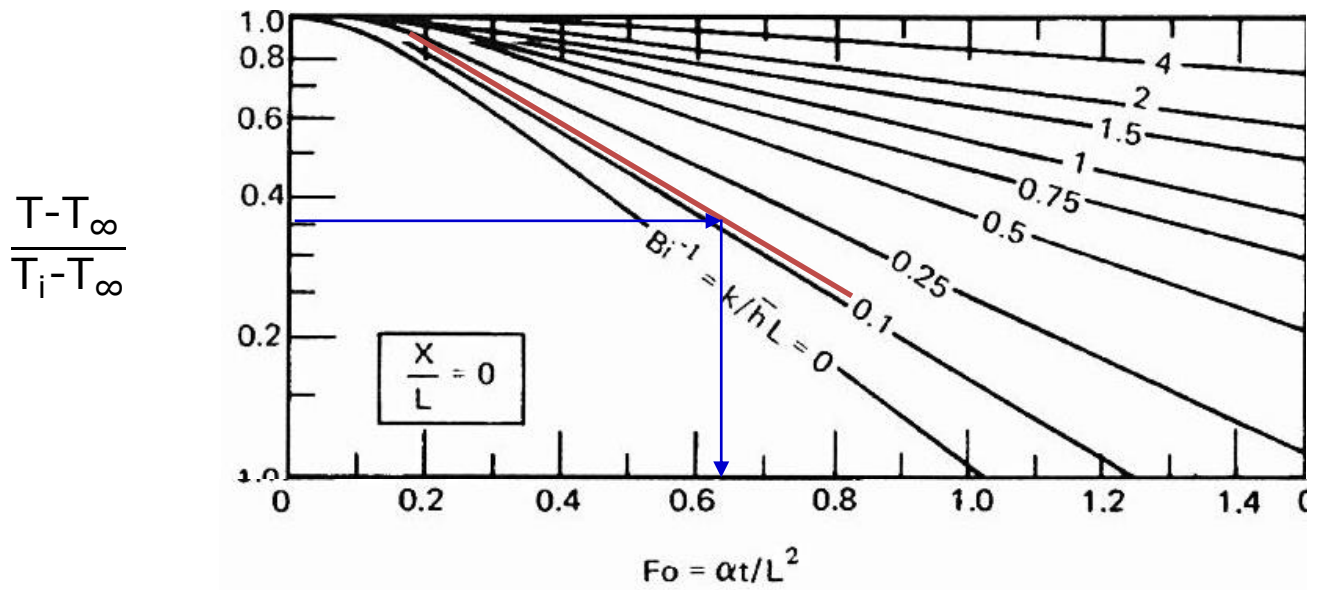
Vamos utilizar os diagramas de temperatura transiente para placa plana de espessura $2L$.

a) $T_{\text{central}} = 600 \text{ }^\circ\text{C} \rightarrow t = ?$

$$\alpha = \frac{K}{\rho C_p} = \frac{0,8}{2307 \times 0,2} = 1,73 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{600 - 900}{40 - 900} = 0,35$$

$$Bi^{-1} = K/hL = 0,80/25 \times 0,30 = 0,11$$

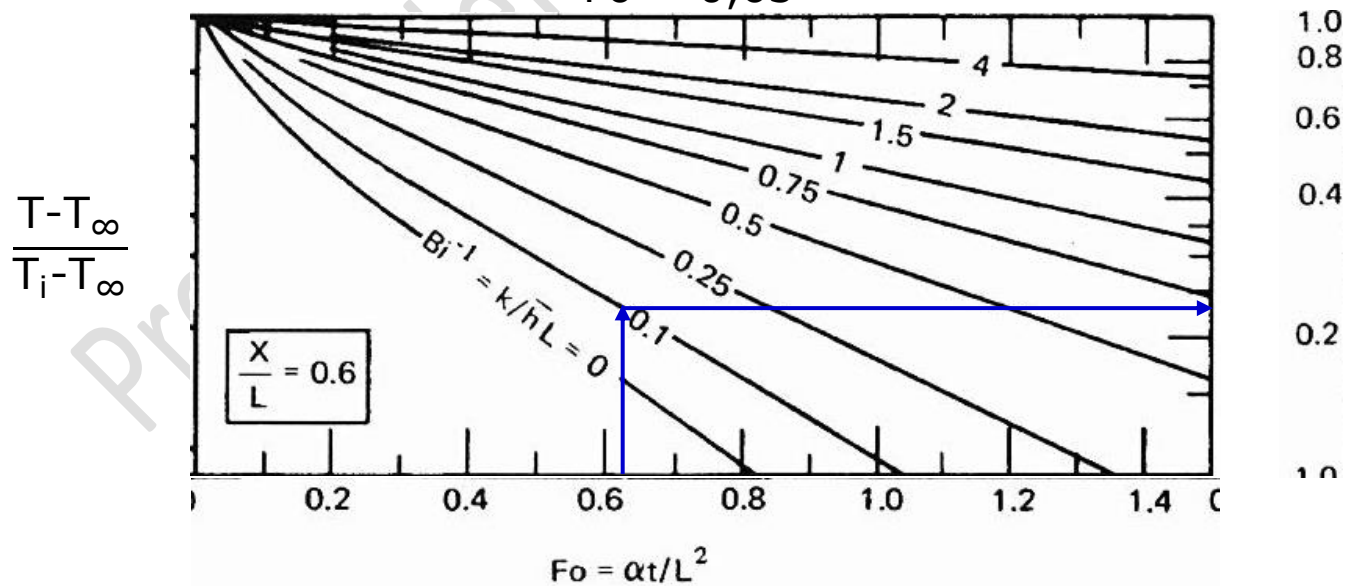


$$Fo = \alpha t/L^2 \rightarrow t = Fo \times L^2/\alpha \rightarrow t = 0,63 \times 0,3^2/1,73 \times 10^{-3}$$

$$t = 33 \text{ h}$$

$$b) x = 30 - 12 = 18 \text{ cm} \rightarrow x/L = 18/30 = 0,6$$

$$Fo = 0,63$$



$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = 0,23 \rightarrow T = 700 \text{ }^{\circ}\text{C.}$$

Sistemas com resistência externa desprezível: para o caso anterior, quando o coeficiente de transferência de calor convectivo, \bar{h} , é muito grande, podemos considerar que a temperatura superficial da placa é muito próxima da temperatura do meio, assim teremos as seguintes condições de contorno e inicial:

$$\text{CI.} \quad t = 0 \rightarrow T = T_i \text{ (p/ todo } x)$$

$$\text{CC1.} \quad x = 0 \rightarrow \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0 \text{ (p/ } t \geq 0)$$

$$\text{CC2.} \quad x = L \rightarrow T = T_\infty \text{ (p/ } t \geq 0)$$

Neste caso, a solução para a equação governante pode ser apresentada na forma de uma série:

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + 1/2)} \cos(n + 1/2)\pi \frac{x}{L} \exp - ((n + 1/2)\pi)^2 \frac{\alpha t}{L^2}$$

Para $n = 0$, temos:

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \Theta = \underbrace{\left(\frac{4}{\pi}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}_{\text{Variação com a posição}} \underbrace{\exp\left(-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\alpha t}{L^2}\right)}_{\text{Variação com o tempo}}$$

Aplicando-se Ln na equação acima:

$$\text{Ln}(\Theta) = \text{Ln}\left(\frac{4}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2L}\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\alpha t}{L^2}$$

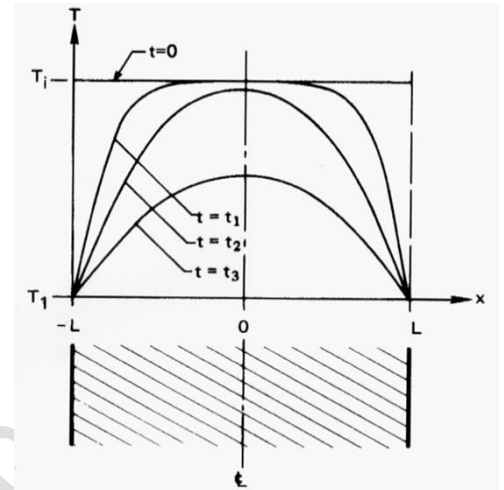
$$\text{Ln}(u.v) = \text{Ln}(u) + \text{Ln}(v)$$

Observa-se uma relação linear entre $\text{Ln}(\Theta)$ e o grupo $\left(\frac{\alpha t}{L^2}\right)$ (número de Fourier). Para \bar{h} muito grande ($\bar{h} \approx \infty$), $\text{Bi}^{-1} \approx 0$,

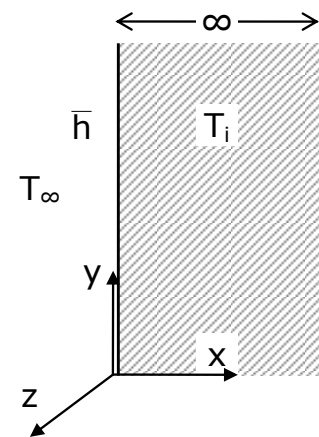
assim os diagramas de Θ versus $\left(\frac{\alpha t}{L^2}\right)$ podem ser usados, pois:

$$\frac{K}{\bar{h}L} = \frac{1}{Bi} = Bi^{-1}$$

A figura ao lado, exibe o desenvolvimento dos perfis de temperatura para o resfriamento transiente de uma placa com temperatura inicial T_i . A temperatura superficial mudou, subitamente, para T_1 .



Placa sólida semi-infinita: um material sólido ocupando o espaço entre $x=0$ e $x=\infty$ está inicialmente a T_i , subitamente, é exposto ao ambiente com T_∞ . Se \bar{h} for muito grande, podemos assumir que sua superfície, $x=0$, assume T_∞ .



A equação governante para este caso específico torna-se:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \left(\frac{d^2T}{dx^2} \right) = \alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right)$$

Com as seguintes condições de contorno e inicial:

- CI. $t < 0 \rightarrow T = T_i$ (p/ todo x)
 CC1. $x = 0 \rightarrow T = T_\infty$ (p/ $t \geq 0$)
 CC2. $x = \infty \rightarrow T = T_i$ (p/ $t \geq 0$)

A solução para a equação acima pode ser encontrada:

$$\left(\frac{T - T_i}{T_\infty - T_i} \right) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \right) = 1 - \operatorname{erf}(\phi)$$

A função $\operatorname{erf}(\Phi)$ é chamada função erro de Gauss e seus valores podem ser encontrados em tabelas e gráficos.

O fluxo de calor instantâneo na superfície pode ser estimado por:

$$\dot{q}_x|_{y=0} = -k \frac{dT}{dx}|_{y=0} = \frac{k}{\sqrt{\pi\alpha t}} (T_\infty - T_i)$$

T_∞ é a temperatura superficial!

O fluxo total de energia durante um intervalo de tempo Δt :

$$\dot{q} = 2K(T_\infty - T_i) \sqrt{\frac{\Delta t}{\pi\alpha}}$$

A formulação acima pode ser aplicada, em algumas situações, para corpos finitos com transferência de calor unidirecional. Como um critério geral, para corpos de

espessura finita L : $\frac{L}{\sqrt{4\alpha t}} \geq 0,5$

Error Function Tabulated

ϕ	$\text{erf}(\phi)$	ϕ	$\text{erf}(\phi)$	ϕ	$\text{erf}(\phi)$
0.000	0.0000	0.850	0.7707	1.700	0.9838
0.025	0.0282	0.875	0.7841	1.725	0.9853
0.050	0.0564	0.900	0.7969	1.750	0.9867
0.075	0.0845	0.925	0.8092	1.775	0.9879
0.100	0.1125	0.950	0.8209	1.800	0.9891
0.125	0.1403	0.975	0.8321	1.825	0.9901
0.150	0.1680	1.000	0.8427	1.850	0.9911
0.175	0.1955	1.025	0.8528	1.875	0.9920
0.200	0.2227	1.050	0.8624	1.900	0.9928
0.225	0.2497	1.075	0.8716	1.925	0.9935
0.250	0.2763	1.100	0.8802	1.950	0.9942
0.275	0.3027	1.125	0.8884	1.975	0.9948
0.300	0.3286	1.150	0.8961	2.000	0.9953
0.325	0.3542	1.175	0.9034	2.025	0.9958
0.350	0.3794	1.200	0.9103	2.050	0.9963
0.375	0.4041	1.225	0.9168	2.075	0.9967
0.400	0.4284	1.250	0.9229	2.100	0.9970
0.425	0.4522	1.275	0.9286	2.125	0.9973
0.450	0.4755	1.300	0.9340	2.150	0.9976
0.475	0.4983	1.325	0.9390	2.175	0.9979
0.500	0.5205	1.350	0.9438	2.200	0.9981
0.525	0.5422	1.375	0.9482	2.225	0.9983
0.550	0.5633	1.400	0.9523	2.250	0.9985
0.575	0.5839	1.425	0.9561	2.275	0.9987
0.600	0.6039	1.450	0.9597	2.300	0.9989
0.625	0.6232	1.475	0.9630	2.325	0.9990
0.650	0.6420	1.500	0.9661	2.350	0.9991
0.675	0.6602	1.525	0.9690	2.375	0.9992
0.700	0.6778	1.550	0.9716	2.400	0.9993
0.725	0.6948	1.575	0.9741	2.425	0.9994
0.750	0.7112	1.600	0.9763	2.450	0.9995
0.775	0.7269	1.625	0.9784	2.475	0.9995
0.800	0.7421	1.650	0.9804		
0.825	0.7567	1.675	0.9822		