PROVA 1 – GEOMETRIA ANALÍTICA

Nome:________________________________ **Nº USP:**__________ **Data: 07/07/2020**

Atenção:

- Responda todas as questões de maneira prolixa, explicando todos os seus passos.

Questão 1. (2,0 pt) Sendo M o ponto médio de AB, N o ponto médio de CD e $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$, prove que $\vec{x} \,//\, \overrightarrow{MN}$.

Questão 2. (2,0 pt) Prove que:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ é } LI \Rightarrow (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{v}, 3\vec{v}) \text{ é } LI$$

Questão 3. (1,0 pt) Um carrinho é puxado uma distância de 100 m ao longo de um caminho horizontal por uma força constante de 70 N. A alça do carrinho é mantida a um ângulo de 35º acima da horizontal. Encontre o trabalho feito pela força, sabendo que o trabalho é calculado por $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$.

Questão 4. (2,0 pt) Calcular a norma dos vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$, sabendo que $\|\vec{u}\| = 4$ e $\|\vec{v}\| = 3$ e a medida angular de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60º.

Questão 5. Dada a base $E = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, sejam:

$$\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$$
$$\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$$
$$\overrightarrow{f_3} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 4\overrightarrow{e_3}$$

a) (1,0 pt) Verificar se $F = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ é uma base.

b) (2,0 pt) Sendo $\vec{v} = 3\overrightarrow{e_1} - 5\overrightarrow{e_2} + 4\overrightarrow{e_3}$, achar as coordenadas de $\vec{v}$ na base F.

Boa Prova!!!

Questão 1:

$$\vec{x} = \vec{AB} + \vec{AD} - 3\vec{CB} + \vec{CD}$$

- $\vec{MN} = \vec{MB} + \vec{BC} + \vec{CN}$

$\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CD}$

$2\vec{MN} = \vec{AB} + 2\vec{BC} + \vec{CD}$

$\vec{AB} + \vec{CD} = 2\vec{MN} - 2\vec{BC}$ (I)

- $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AD} + \vec{DN}$

$\vec{MN} = \frac{\vec{BA}}{2} + \vec{AD} + \frac{\vec{DC}}{2}$

$2\vec{MN} = \vec{BA} + 2\vec{AD} + \vec{DC}$

$\vec{BA} + \vec{DC} = 2\vec{MN} - 2\vec{AD}$

$-\vec{AB} - \vec{CD} = 2\vec{MN} - 2\vec{AD}$

$\vec{AB} + \vec{CD} = -2\vec{MN} + 2\vec{AD}$ (II)

Igualando (I) e (II), temos:

$2\vec{MN} - 2\vec{BC} = -2\vec{MN} + 2\vec{AD}$

$\vec{AD} = 2\vec{MN} - \vec{BC}$ (III)

$\therefore$ $\vec{x} = \vec{AB} + \vec{AD} - 3\vec{CB} + \vec{CD}$ De (I)

$\vec{x} = 2\vec{MN} - 2\vec{BC} + \vec{AD} - 3\vec{CB}$

$\vec{x} = 2\vec{MN} - 2\vec{BC} + \vec{AD} + 3\vec{BC}$

$\vec{x} = 2\vec{MN} + \vec{AD} + \vec{BC}$ De (III)

$\vec{x} = 2\vec{MN} + 2\vec{MN}$

$\vec{x} = 4\vec{MN}$

$\therefore \vec{x} \parallel \vec{MN}$

Questão 2:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ é } LI \Rightarrow (\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}, \vec{u}-\vec{v}, 3\vec{v}) \text{ é } LI$$

$LI \Rightarrow$ combinação linear:

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$$

onde $\alpha=\beta=\gamma=0$

$$\alpha(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})+\beta(\vec{u}-\vec{v})+\gamma(3\vec{v})=\vec{0}$$

$$\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}+\alpha\vec{w}+\beta\vec{u}-\beta\vec{v}+3\gamma\vec{v}=\vec{0}$$

$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}+\alpha\vec{v}-\beta\vec{v}+3\gamma\vec{v}+\alpha\vec{w}=\vec{0}$$

$$(\alpha+\beta)\vec{u}+(\alpha-\beta+3\gamma)\vec{v}+\alpha\vec{w}=\vec{0}$$

Sabendo que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI, temos:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha-\beta+3\gamma=0 \\ \alpha=0 \end{cases}$$

Como pode-se verificar, $\alpha=\beta=\gamma=0$ é a única solução desse sistema, podemo concluir que:

$$(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}, \vec{u}-\vec{v}, 3\vec{w}) \text{ é } LI$$

Questão

1.

$\|\vec{d}\| = 100\ m$

$\|\vec{F}\| = 70\ N$

$\theta = 35°$

Sabendo que o trabalho pode ser calculado por:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$\therefore \quad W = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{d}\| \cdot \cos\theta$$

$$W = 70\ N \cdot 100m \cdot \cos 35$$

$$\underline{W = 5.734,1\ Nm}$$

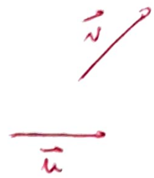
R.

Questão

$\|\vec{u}\| = 4$

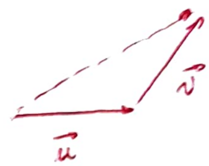
$\|\vec{v}\| = 3$

medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ = $60°$



- $\vec{u} + \vec{v}$

Utilizando a Lei dos cossenos:



$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$= 4^2 + 3^2 + 2.(4).(3) \cos 60°$$

$$= 37$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{37}$$

- $\vec{u} - \vec{v}$

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$= 4^2 + 3^2 - 2.(4)(3) \cos 60°$$

$$= 13$$

$$\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{13}$$

Questão

Base $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

$$\vec{f_1} = \vec{e_1} - \vec{e_2} - \vec{e_3}$$
$$\vec{f_2} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_3}$$
$$\vec{f_3} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} + 4\vec{e_3}$$

a) Verificar se $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é uma base.

Para que F seja uma base, deve ser LI.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 1(8-1) + 1(4-2) - 1(1-4)$$
$$= 7 + 2 + 3$$
$$= \underline{12}$$

∴ Como a determinante é diferente de 0, é LI.

Logo, $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é uma base.

b) Sendo $\vec{v} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3}$, achar as coordenadas de $\vec{v}$ na base F.

$$\vec{v} = 3\vec{e_1} - 5\vec{e_2} + 4\vec{e_3}$$

Portanto, devemos encontrar $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ e $\vec{e_3}$.

(I) $\vec{f_1} = \vec{e_1} - \vec{e_2} - \vec{e_3}$

(II) $\vec{f_2} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_3}$

(III) $\vec{f_3} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} + 4\vec{e_3}$ $\times(-1)$

$$\vec{f_1} = \vec{e_1} - \vec{e_2} - \vec{e_3}$$
$$\vec{f_2} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_3}$$
$$-\vec{f_3} = -2\vec{e_1} - \vec{e_2} - 4\vec{e_3}$$
$$\vec{f_1} + \vec{f_2} - \vec{f_3} = 0 + 0 - 4\vec{e_3}$$

• $\vec{e_3} = -\frac{1}{4}\vec{f_1} - \frac{1}{4}\vec{f_2} + \frac{1}{4}\vec{f_3}$

De (III), temos:

$$\vec{f_3} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} + 4\left(-\frac{1}{4}\vec{f_1} - \frac{1}{4}\vec{f_2} + \frac{1}{4}\vec{f_3}\right)$$

$$\cancel{\vec{f_3}} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{f_1} - \vec{f_2} + \cancel{\vec{f_3}}$$

$$\vec{e_2} = -2\vec{e_1} + \vec{f_1} + \vec{f_2} \qquad \text{(IV)}$$

De (I), temos:

$$\vec{f_1} = \vec{e_1} - \left(-2\vec{e_1} + \vec{f_1} + \vec{f_2}\right) - \left(-\frac{1}{4}\vec{f_1} - \frac{1}{4}\vec{f_2} + \frac{1}{4}\vec{f_3}\right)$$

$$\vec{f_1} = \vec{e_1} + 2\vec{e_1} - \vec{f_1} + \frac{1}{4}\vec{f_1} - \vec{f_2} + \frac{1}{4}\vec{f_2} - \frac{1}{4}\vec{f_3}$$

$$-3\vec{e_1} = -\frac{7}{4}\vec{f_1} - \frac{3}{4}\vec{f_2} - \frac{1}{4}\vec{f_3}$$

- $\vec{e_1} = +\frac{7}{12}\vec{f_1} + \frac{1}{4}\vec{f_2} + \frac{1}{12}\vec{f_3}$

De (IV), temos:

$$\vec{e_2} = -2\left(\frac{7}{12}\vec{f_1} + \frac{1}{4}\vec{f_2} + \frac{1}{12}\vec{f_3}\right) + \vec{f_1} + \vec{f_2}$$

$$\vec{e_2} = -\frac{7}{6}\vec{f_1} + \vec{f_1} - \frac{1}{2}\vec{f_2} + \vec{f_2} - \frac{1}{6}\vec{f_3}$$

- $\vec{e_2} = -\frac{1}{6}\vec{f_1} + \frac{1}{2}\vec{f_2} - \frac{1}{6}\vec{f_3}$

$$\therefore \quad \vec{v} = 3\,\vec{e_1} - 5\,\vec{e_2} + 4\,\vec{e_3}$$

$$\vec{v} = 3\left(\frac{7}{12}\vec{f_1} + \frac{1}{4}\vec{f_2} + \frac{1}{12}\vec{f_3}\right) - 5\left(-\frac{1}{6}\vec{f_1} + \frac{1}{2}\vec{f_2} - \frac{1}{6}\vec{f_3}\right) + 4\left(-\frac{1}{4}\vec{f_1} - \frac{1}{4}\vec{f_2} + \frac{1}{4}\vec{f_3}\right)$$

$$\vec{v} = \frac{7}{4}\vec{f_1} + \frac{5}{6}\vec{f_1} - 1\,\vec{f_1} + \frac{3}{4}\vec{f_2} - \frac{5}{2}\vec{f_2} - 1\,\vec{f_2} + \frac{1}{4}\vec{f_3} + \frac{5}{6}\vec{f_3} + 1\,\vec{f_3}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{19}{12}\vec{f_1} - \frac{11}{4}\vec{f_2} + \frac{25}{12}\vec{f_3}}$$

ou

$$\boxed{\vec{v} = \left(\frac{19}{12}, -\frac{11}{4}, \frac{25}{12}\right)_F}$$