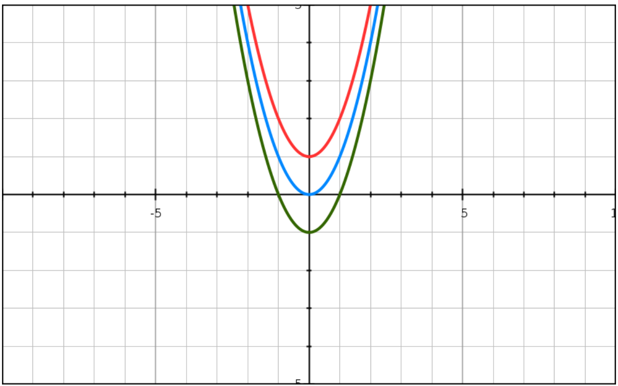
Fórmulas de translação, Função definidas por partes e a álgebra das funções

Fórmulas de translação

Teorema

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *função e* $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. *O gráfico da função* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + k$ *é o gráfico de* f *transladado* k *unidades para cima se* $k > 0$ *e* $|k|$ *unidades para baixo se* $k < 0$.

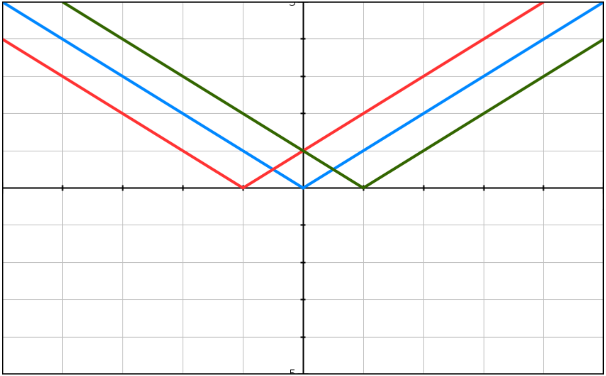
Gráficos de $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 1$ e $h(x) = x^2 - 1$



Teorema

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *função e* $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. *O gráfico da função* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x+k)$ *é o gráfico de* f *transladado* k *unidades para esquerda se* $k > 0$ *e* $|k|$ *unidades para direita se* $k < 0$.

Gráficos de $f(x) = |x|$, $g(x) = |x - 1|$ e $h(x) = |x + 1|$



Definição

Dizemos que uma função é definida por partes quando é definida por regras diferentes em distintas partes do seu domínio.

Exemplo

$$|x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ \ x < 0 \end{cases}$$

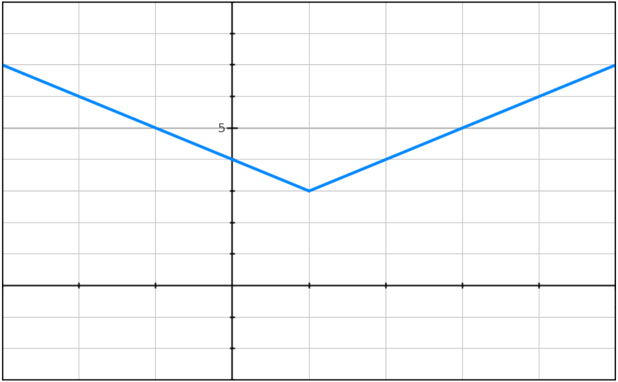
Exemplo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & se\ x \geq 2 \\ x, & se\ \ x < 2 \end{cases}$$

Exemplo

$$|x - 1| + 3 = \begin{cases} x + 2, & se\ x \geq 1 \\ 4 - x, & se\ \ x < 1 \end{cases}$$

Gráficos de $f(x) = |x|$ e $g(x) = |x-1| + 3$



A álgebra das funções

Definição

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ *e* $g : D_g \to \mathbb{R}$. *Definimos:*

a) (soma) $f + g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ *como* $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

b) (produto) $fg : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ *como* $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

c) (quociente) $\frac{f}{g} : D_f \cap D_g - \{x; g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ *como*
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Exemplo

Seja $f(x) = \sqrt{8-x}$ *e* $g(x) = \sqrt{x-1}$. *Temos que* $D_f = (-\infty, 8]$ *e* $D_g = [1, +\infty)$. *Logo*

a) $(f+g)(x) = \sqrt{8-x} + \sqrt{x-1}$, $1 \leq x \leq 8$.

b) $(fg)(x) = \sqrt{8-x}\sqrt{x-1} = \sqrt{(8-x)(x-1)}$, $1 \leq x \leq 8$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{8-x}}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{\frac{8-x}{x-1}}$, $1 < x \leq 8$

Exemplo

Seja $f(x) = 3x^2 + 6x - 7$ *e* $g(x) = x^2 - 1$. *Temos que* $D_f = \mathbb{R}$ *e* $D_g = \mathbb{R}$. *Logo*

a) $(f+g)(x) = 4x^2 + 6x - 8,\ x \in \mathbb{R}$.

b) $(fg)(x) = 3x^4 + 6x^3 - 10x^2 - 6x + 7,\ x \in \mathbb{R}$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x^2+6x-7}{x^2-1},\ x \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$