Retas e planos em $\mathbb{R}^3$

MAP 2110 - Diurno

IME USP

14 de julho de 2020

Equação de uma reta

- P é um ponto de $\mathbb{R}^3$
- $\mathbf{v}umvetor$
- O conjunto $\{\mathbf{x} : x = P + t\mathbf{v}, t \in \mathbb{R}\}$ é uma reta em $\mathbb{R}^3$
- $r : P + t\mathbf{v}$ é a equação vetorial de uma reta.
- $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} tv_1 \\ tv_2 \\ tv_3 \end{bmatrix}$ é a equação paramétrica

Para determinar a equação vetorial de uma reta, usamos um ponto P e um vetor $\mathbf{v}$. Será que sempre que tomarmos $Q \neq P$ e $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ as retas $P + t\mathbf{v}$ e $Q + s\mathbf{u}$ são diferentes?

Problemas básicos

- achar a intersecção de duas retas.
- projetar ortogonalmente um ponto sobre uma reta

Exemplo

Achar a intersecção das retas:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1-3t \\ y & = & 2+5t \\ z & = & 1+t \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} x & = & -1+s \\ y & = & 3-4s \\ z & = & 1-s \end{array}$$

Exemplo 2

Achar a projeção ortogonal do ponto $Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ na reta

$r : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Equações vetoriais e paramétricas de um plano em $\mathbb{R}^3$

- $P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_2 \end{bmatrix}$ é um ponto.
- $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ são vetores LI
- $\Pi : P + t\mathbf{v} + s\mathbf{u}$ equação do plano.
- $\begin{array}{rcl} x & = & p_1 + tv_1 + su_1 \\ y & = & p_2 + tv_2 + su_2 \\ z & = & p_3 + tv_3 + su_3 \end{array}$ é a equação paramétrica

Direção normal a um plano

O vetor $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$ determina um vetor perpendicular ao plano Π. Dizem os que $\mathbf{n}$ é normal ao plano Π que pode ser caracterizado como os pontos X tais que $(X - P) \cdot \mathbf{n} = 0$, chamada de equação vetorial do plano.

Se temos $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_2 \end{bmatrix}$ um ponto do plano. Então as coordenadas de qualquer outro ponto do plano satisfaz:

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \implies$$

$$ax + by + cz = F$$

$$F = P \cdot \mathbf{n}$$

A última equação é a equação geral de um plano no espaço.

problemas básicos

Intersecção de dois planos.

$$\begin{cases} \Pi_1: & x+y+z & = & 1 \\ \Pi_2: & 2x-y-2z & = & 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4/3 & -1/3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 4/3 & -1/3 \end{array}\right]$$

Projetar um ponto sobre um plano

Exemplo: Projetar o ponto $P = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ortogonalmente no plano $x + y + z = 1$