09-07-2020

quarta-feira, 8 de julho de 2020 22:38

1) d) Calcular o limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}(\operatorname{sen}x + x^2\cos x)}{x\sqrt{x} + \operatorname{sen}(x\sqrt{x})}$

$$\frac{\sqrt{x}(\operatorname{sen}x + x^2\cos x)}{x\sqrt{x} + \operatorname{sen}(x\sqrt{x})} = \frac{x\cancel{\sqrt{x}}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x} + x\cos x\right)}{x\sqrt{x}\left(1 + \frac{\operatorname{sen}(x\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}\right)}$$

$$= \frac{\frac{\operatorname{sen}x}{x} + x\cos x}{1 + \frac{\operatorname{sen}(x\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} x\cos x = 0.1 = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x\sqrt{x})}{x\sqrt{x}} = \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 1}$$

$u = x\sqrt{x}$

$x\to 0 \Rightarrow u = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}(\operatorname{sen}x + x^2\cos x)}{x\sqrt{x} + \operatorname{sen}(x\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0}\frac{\overset{\nearrow 1}{\frac{\operatorname{sen}x}{x}} + \overset{\nearrow 0}{x\cos x}}{1 + \underset{\searrow 1}{\frac{\operatorname{sen}(x\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}}} = \frac{1+0}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Exemplo: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{bx}$, $b \neq 0$

se $a=0$, então $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{bx} = 0$

se $a \neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{bx}$

mudança de variável, $\boxed{u = ax} \Rightarrow x = \dfrac{u}{a}$ $(a\neq 0)$

$x \to 0 \Rightarrow u \to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(ax)}{bx} = \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}(u)}{b\frac{u}{a}} = \frac{a}{b}\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = \frac{a}{b}.1$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(ax)}{bx} = \frac{a}{b}}, \ \forall a,b\in\mathbb{R},\ b\neq 0$$

Aplicações da derivada: Esboço do gráfico de uma função

Teorema do Valor Médio:

Seja f contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$

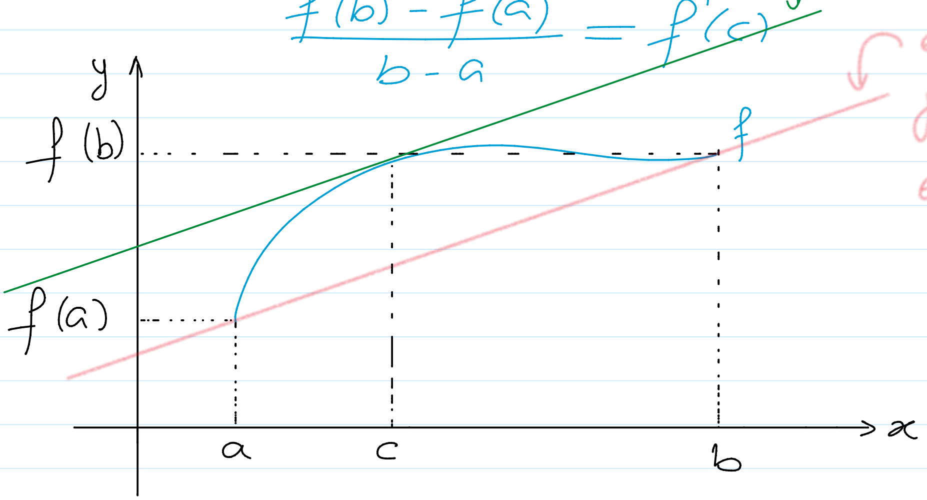
Então existe $c \in]a,b[$ tal que

Seja f contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$

Então existe $c \in]a,b[$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

o coeficiente angular é $f'(c)$



e a reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ então ela tem

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

como coeficiente angular

Existe $c \in]a,b[$ tal que a reta tangente ao gráfico da f no ponto $(c, f(c))$ é paralela a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, logo elas tem o mesmo coeficiente angular

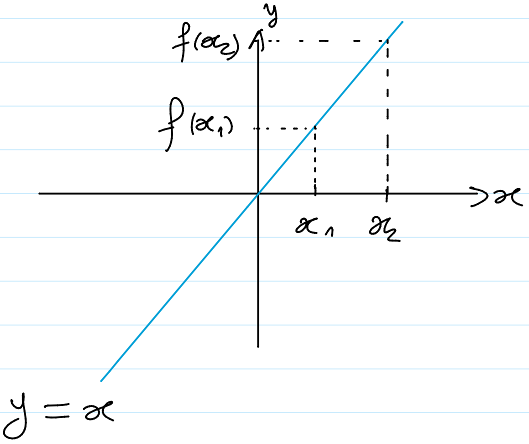
$$\therefore \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

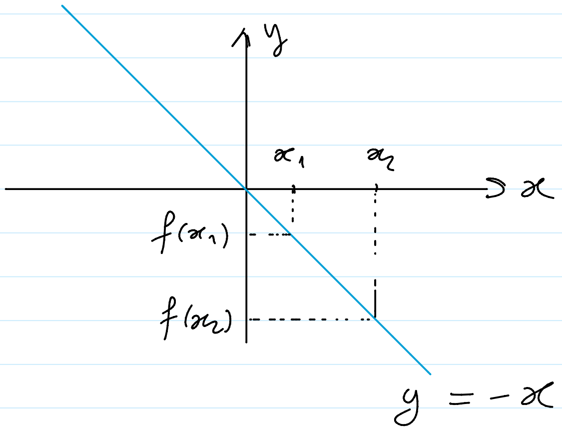
DEF: Dizemos que f é crescente (decrescente) no intervalo I se para todo $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$, então

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \left(f(x_1) > f(x_2) \right)$$

exemplos: $f(x) = x$ é uma função crescente

$f(x) = -x$ é uma função decrescente





Proposição: Seja f contínua no intervalo I e derivável no interior de I

(i) Se $f'(x) > 0$, para todo x no interior de I, então f é crescente em I;

(ii) Se $f'(x) < 0$, para todo x no interior de I, então f é decrescente em I.

Dem: (i) Sejam $x_1, x_2 \in I$, com $\boxed{x_1 < x_2}$

Como f é contínua em I, então f é contínua em $[x_1, x_2]$, pois $[x_1, x_2] \subset I$

Como f é derivável no interior de I, então f é derivável em $]a,b[$

Pelo Teorema do Valor médio, existe $c \in]a,b[$ tal que

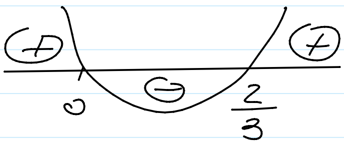
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} = f'(c) > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$$

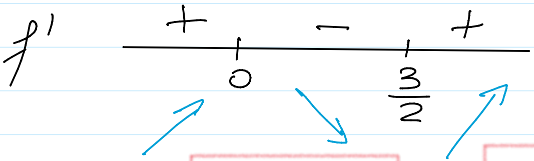
$$\Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow \boxed{f(x_1) < f(x_2)}$$

Analogamente para (ii)

Exemplo: Determinar os intervalos onde $f(x) = x^3 - x^2$ é crescente e decrescente

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2),$$





Notemos que $\boxed{f'(0) = 0}$ e $\boxed{f'\left(\frac{2}{3}\right) = 0}$

$f'(x) > 0$, $\forall x \in]-\infty, 0[$ e em $]\frac{3}{2}, +\infty[$

$\Rightarrow f$ é crescente em $]-\infty, 0]$ e em $[\frac{3}{2}, +\infty[$

$f'(x) < 0$, $\forall x \in]0, \frac{3}{2}[\Rightarrow f$ é decrescente em $[0, \frac{3}{2}]$

DEF: Sejam $f: D_f \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D_f$

i) Seja $A \subset D_f$ e $x_0 \in A$

Dizemos que x_0 é ponto de máximo (mínimo) de f em A, se

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x_0) \le f(x)), \ \forall x \in A$$

$f(x_0)$ é chamado de valor máximo (mínimo) de f em A

ii) Dizemos que x_0 é ponto de máximo (mínimo) global de f se x_0 é máximo (mínimo) de f em D_f isto é,

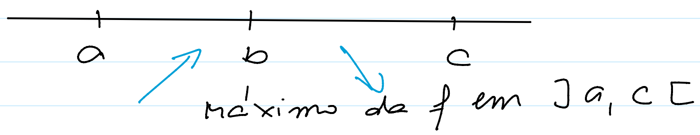
$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x_0) \le f(x)), \ \forall x \in D_f$$

iii) Dizemos que x_0 é ponto de máximo (mínimo) local de f se existe $r>0$ tal que

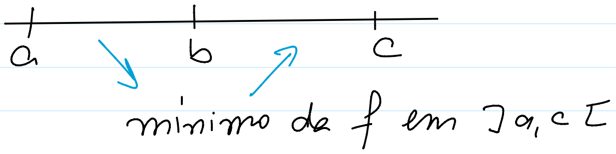
$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x_0) \le f(x)), \ \forall x \in D_f \text{ e } |x - x_0| < r$$

OBS: Se f é crescente (decrescente) no intervalo $]a,b]$ e decrescente (crescente) no intervalo $[b,c[$, então c é ponto de máximo (mínimo) da f em $]a,c[$

①



②



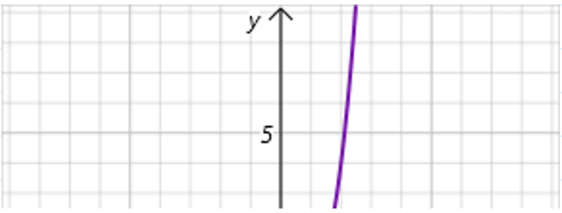
① f é crescente em $]a,b]$ $\Rightarrow$ $f(x) \le f(b)$, $\forall x \in]a,b]$, pois $x \le b$

f é decrescente em $[b,c]$ $\Rightarrow$ $f(b) \ge f(x)$, $\forall x \in [b,c[$, pois $b \le x$

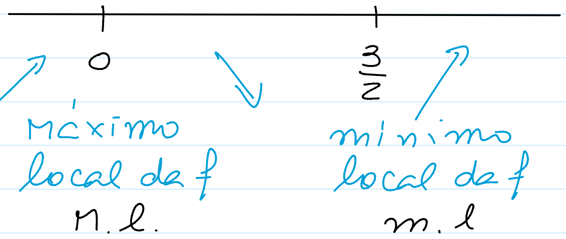
$$\therefore f(x) \le f(b), \ \forall x \in]a,c[$$

Analogamente para ②

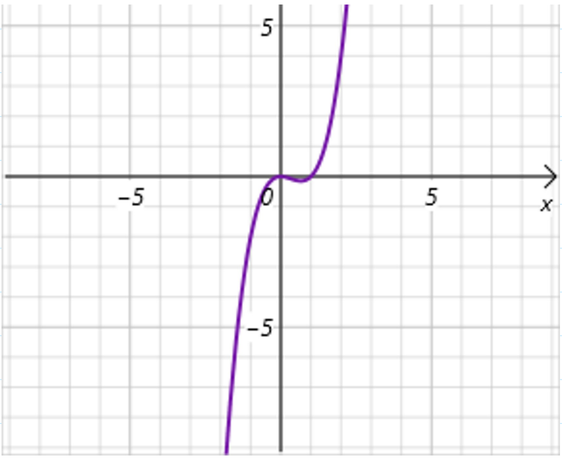
Exemplo: $y = x^3 - x^2$



Exemplo: $y = x^3 - x^2$



Notação



f não tem mínimo e nem máximo global

Claramente se x_0 é ponto de máximo (mínimo) global de f então x_0 é ponto de máximo (mínimo) local de f

A recíproca não é verdadeira.

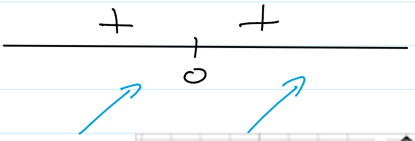
DEF: Sejam $f: D \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$, suponhamos que f é derivável em x_0. Dizemos que x_0 é ponto crítico de f se $f'(x_0) = 0$

Exemplo: $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ é ponto crítico de f

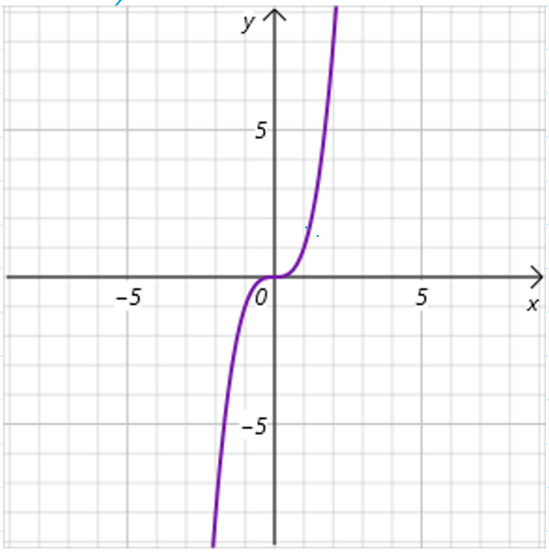
mas $x = 0$ não é máximo e nem mínimo local de f

$f'(x) = 3x^2 \geq 0$



$f(x) = x^3$

f não tem pontos de máximo e nem de mínimo locais e nem globais



Exemplo: Determinar os intervalos de crescimento, decrescimento e os pontos de máximo e mínimo locais de f, se existirem, onde

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$$

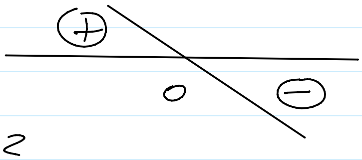
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq -1 \text{ e } x \neq 1\}$$

$$A \setminus B = \{a \in A \,/\, a \notin B\}$$

$$A, B \subset \mathbb{R}, \quad A - B = \{a - b \,/\, a \in A, b \in B\}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2-1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 2x - \cancel{2x^3}}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$y = -2x$



$y = (x^2-1)^2 > 0, \quad \forall x \neq \pm 1$

		−1		0		1	
$-2x$	+		+		−		−
$(x^2-1)^2$	+	○	+		+	○	+
$f'(x)$	+	○	+		−	○	−
	↗		↗	M.l	↘		↘

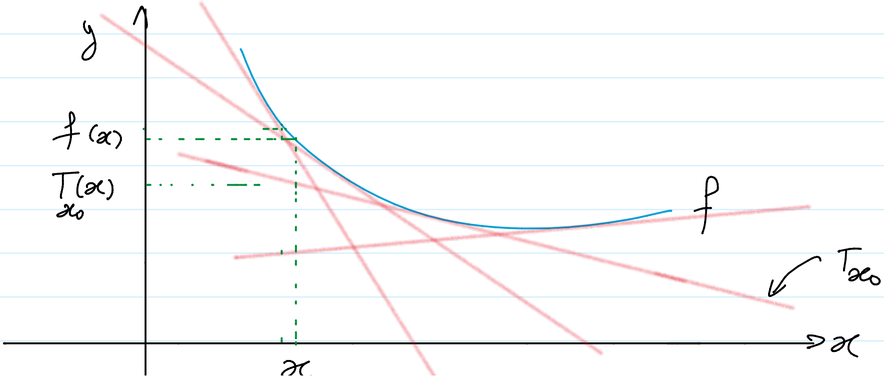
f é crescente em $]-\infty, -1[$ e em $]-1, 0]$

f é decrescente em $[0, 1[$ e em $]1, +\infty[$

$x = 0$ é ponto de máximo local da f

f não tem ponto de mínimo local

CONCAVIDADE



T_{x_0} é a reta tangente ao gráfico da f no

gráfico da f no ponto $(x_0, f(x_0))$

Supor que f é derivável no intervalo aberto I

f tem concavidade para cima (baixo) em I se

$$T_{x_0}(x) \leq f(x) \quad \left(f(x) \leq T_{x_0}(x)\right), \quad \forall x, x_0 \in I$$

onde $T_{x_0}(x)$ é a reta tangente ao gráfico da f no ponto $(x_0, f(x_0))$

PROPOSIÇÃO: Supor que f é derivável até a 2ª ordem no intervalo aberto I

i) Se $f''(x) > 0$, $\forall x \in I$, então f tem concavidade para cima em I;

ii) Se $f''(x) < 0$, $\forall x \in I$, então f tem concavidade para baixo em I.

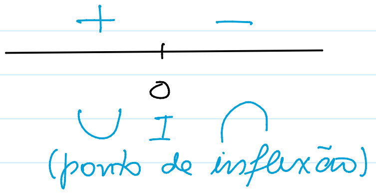
DEF: Dizemos que x_0 é ponto de inflexão de f se existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que f tem concavidade de nomes contrários em $]a, x_0[$ e em $]x_0, b[$

x_0 é o ponto onde f muda de concavidade

Exemplo: $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$



f tem concavidade para cima em $]-\infty, 0[$

e f tem concavidade para baixo em $]0, +\infty[$

$x = 0$ é ponto de inflexão da f.