SEL0382 - Controle Robusto
Observador de Estado

José Nuno Almeida Dias Bueno
7117308

Observador (estimador) de estado

- Na prática, as variáveis de estado podem não estar disponíveis para a realimentação de estado.

- Portanto, é necessário estimar essas variáveis de estado indisponíveis.

Exercício

- Um auto piloto de um navio é utilizado para manter o seu curso. Um modelo linearizado do navio é dado pela seguinte equação diferencial

$$M\ddot{\theta}(\mathrm{t}) = -\mathrm{d}\dot{\theta}(\mathrm{t}) - c\alpha(t) + w(t)$$
$$\dot{\alpha}(t) = -0{,}1\alpha(t) + 0{,}1\,\alpha_c(t)$$

onde $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{t})$ é o erro de rumo, $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t})$ é o ângulo do leme, $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{t})$ é um torque de perturbação e $\boldsymbol{\alpha_c}(\boldsymbol{t})$ é o ângulo de comando do leme. Um esboço do navio é mostrado abaixo.

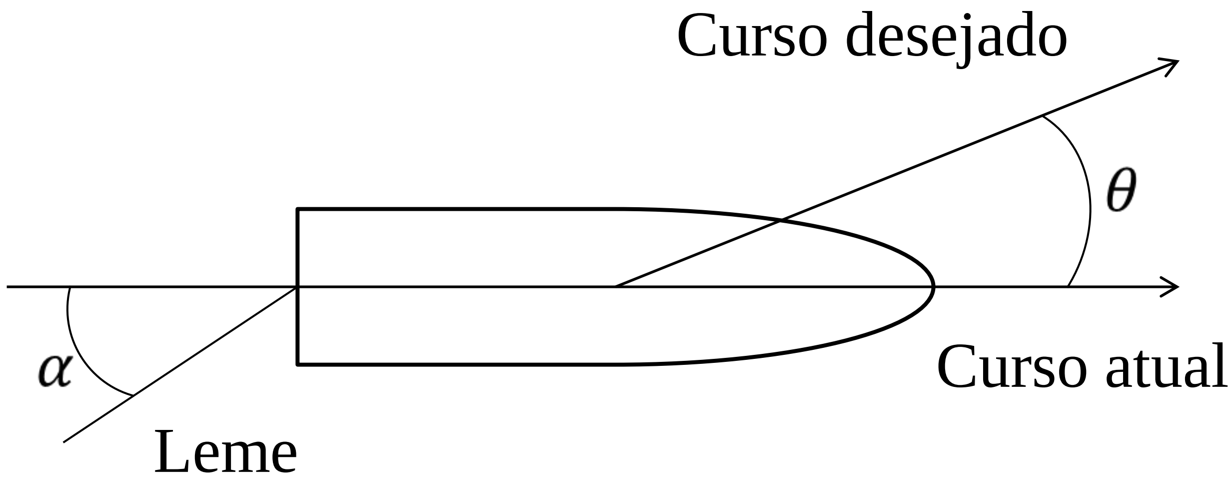
Parâmetros do navio

- $\mathrm{M} = 10^7\ \mathrm{Kg} \cdot \mathrm{m}^2$ é o momento de inércia do navio em torno do eixo vertical relativo ao centro de gravidade.
- $\mathrm{d} = 10^6\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s/rad}$ é o coeficiente de arrasto associado à rotação.
- $\mathrm{c} = 5000\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m/rad}$ é um coeficiente relacionando o ângulo do leme ao torque aplicado.

Variáveis

- $\theta(t)$ é o ângulo medido por uma bússola. O auto piloto precisa fazer a medição deste ângulo e gerar um ângulo de comando para o leme.
- α(t) é o ângulo resultante do movimento do leme.
- α_c(t) é o ângulo de comando, ou seja, a entrada de controle: $\alpha_c(t) = u(t)$
- w(t) é a perturbação do sistema, em [unidades]. Por exemplo vento, corrente de água, etc.

Ilustração do problema



Definição do problema

Pede-se:

-

1. Espaço de estados com $x = [\theta\ \dot{\theta}\ \alpha]$ e $y = \theta$.

2. Obter uma lei de realimentação de estado $u = -K_c \cdot x$ para os polos:
$p1 = p2 = -0.02$ e $p3 = -0.1$
$p1, p2 = -0.02 \pm 0.03j$ e $p3 = -0.1$

3. Realizar duas simulações para cada conjunto de polos. O primeiro para $x(0) = [0\ 0\ 0.1]$ sem perturbação. O Segundo para $x(0) = [0\ 0\ 0]$ e perturbação $w(t) = 1000$. Plotar o ângulo θ(t) e a deflexão α(t) pata cada simulação.

4. Calcular a matriz de ganho K_f de modo que os polos de $(A - K_f C)$ sejam:
$p1 = p2 = -0.08$ e $p3 = -0.4$
$p1 = p2 = -0.16$ e $p3 = -0.4$

5. Para cada observador e $x(0) = [0\ 0\ 0.1]$ plotar a solução x com e sem observador.

Equações de estado e matrizes

$$M\ddot{\theta}(\mathrm{t}) = -\,\mathrm{d}\dot{\theta}(\mathrm{t}) - c\alpha(t) + \overbrace{w(t)}^{\text{perturbação, em}}$$

$$\dot{\alpha}(t) = -0{,}1\alpha(t) + 0{,}1\,\underbrace{\alpha_c(t)}_{\text{entrada de controle } (u(t))}$$

$$x = [\theta\ \dot{\theta}\ \alpha]$$

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta} = \dot{x_1}$$

$$x_3 = \alpha$$

$$y = \theta = x_1$$

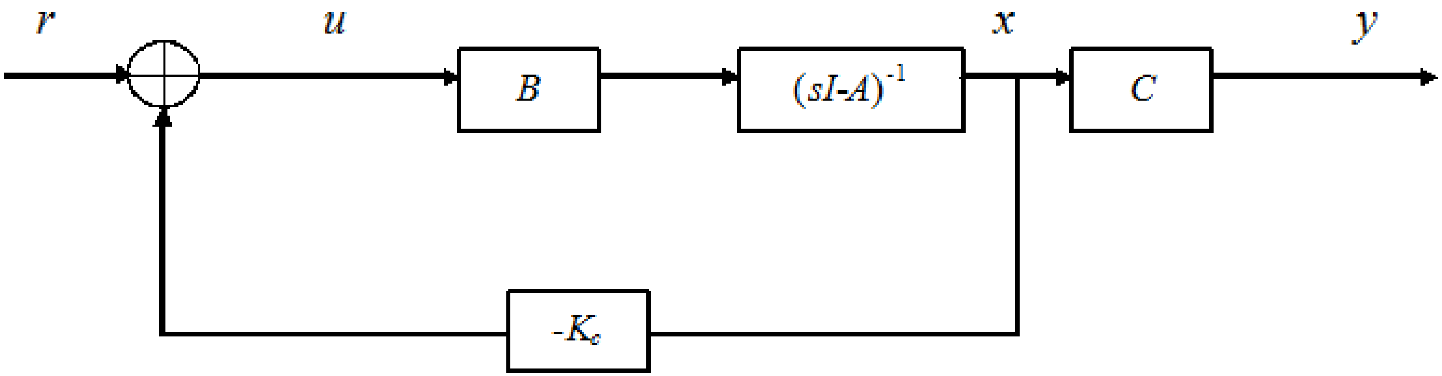
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{d}{M} & -\dfrac{c}{M} \\ 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{M} \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ B1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix};\ B2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{d}{M} & -\dfrac{c}{M} \\ 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} w$$

Diagrama de controle com realimentação de estado



$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$u = r - K_c x$$

$$\dot{x} = Ax + B(r - K_c x)$$

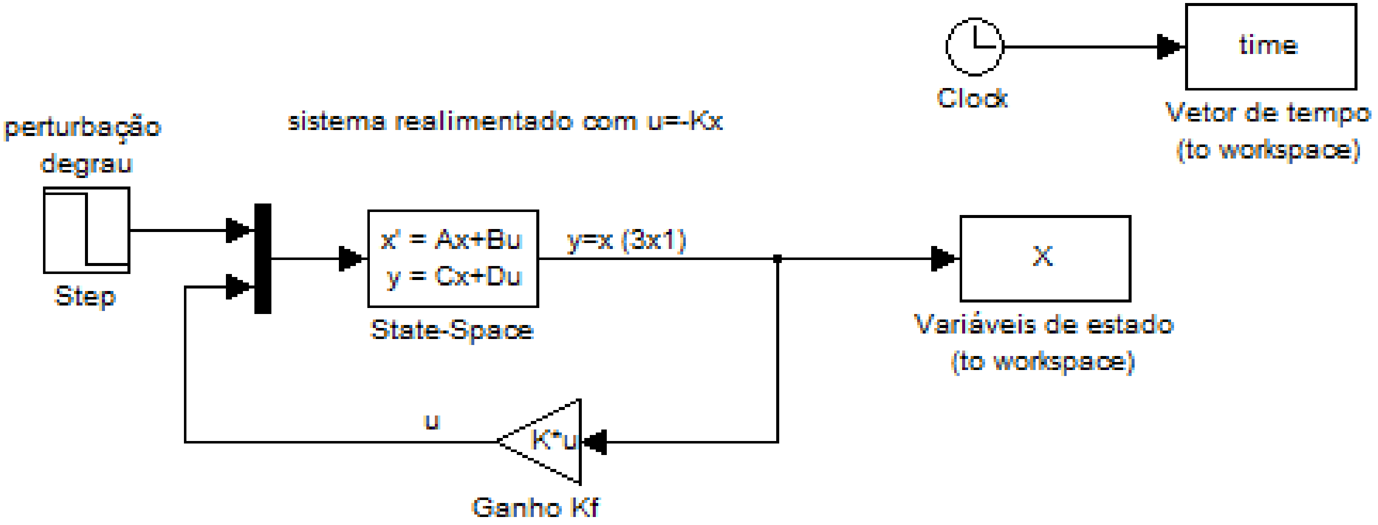
$$\dot{x} = (A - BK_c)x + Br$$

$$Kc = acker(A, B1, P)$$

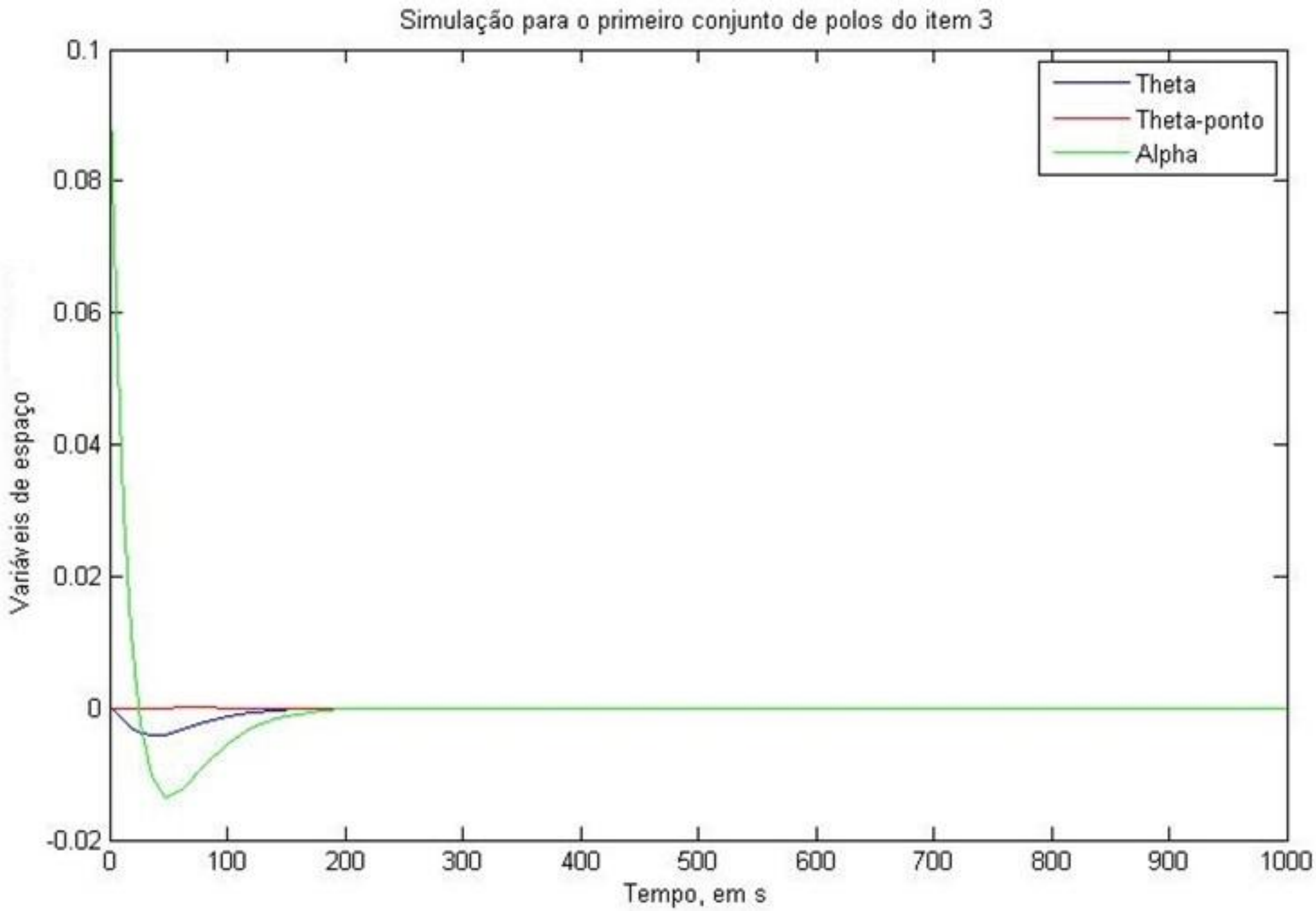
$$Kc1 = \begin{bmatrix} -0.8 \\ -8 \\ -0.6 \end{bmatrix} \quad Kc2 = \begin{bmatrix} -2.6 \\ -26 \\ -0.6 \end{bmatrix}$$

Diagrama de simulação sem observador

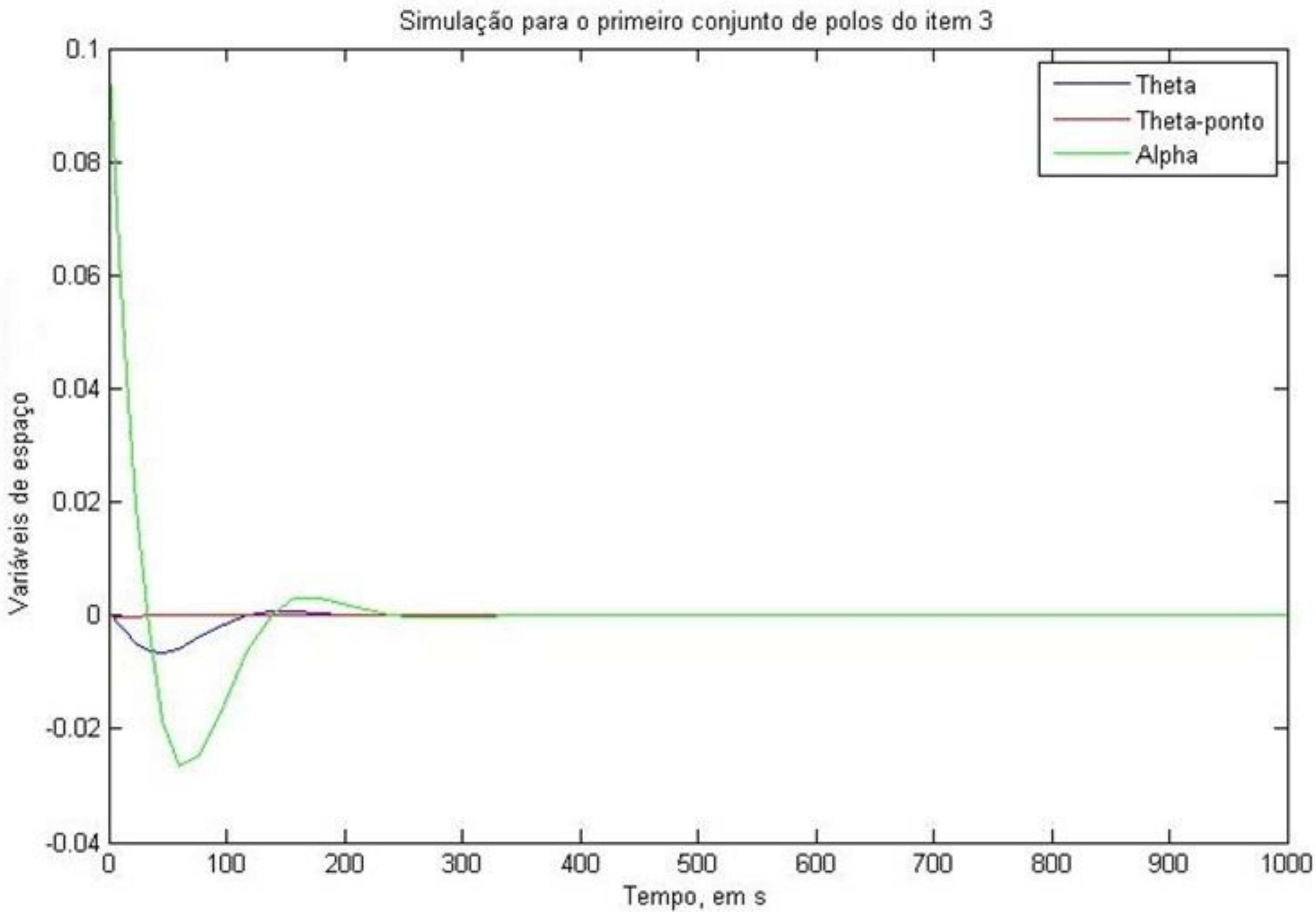
Realimentação de estado u = -Kx, C = eye(3) e D = [0; 0; 0].



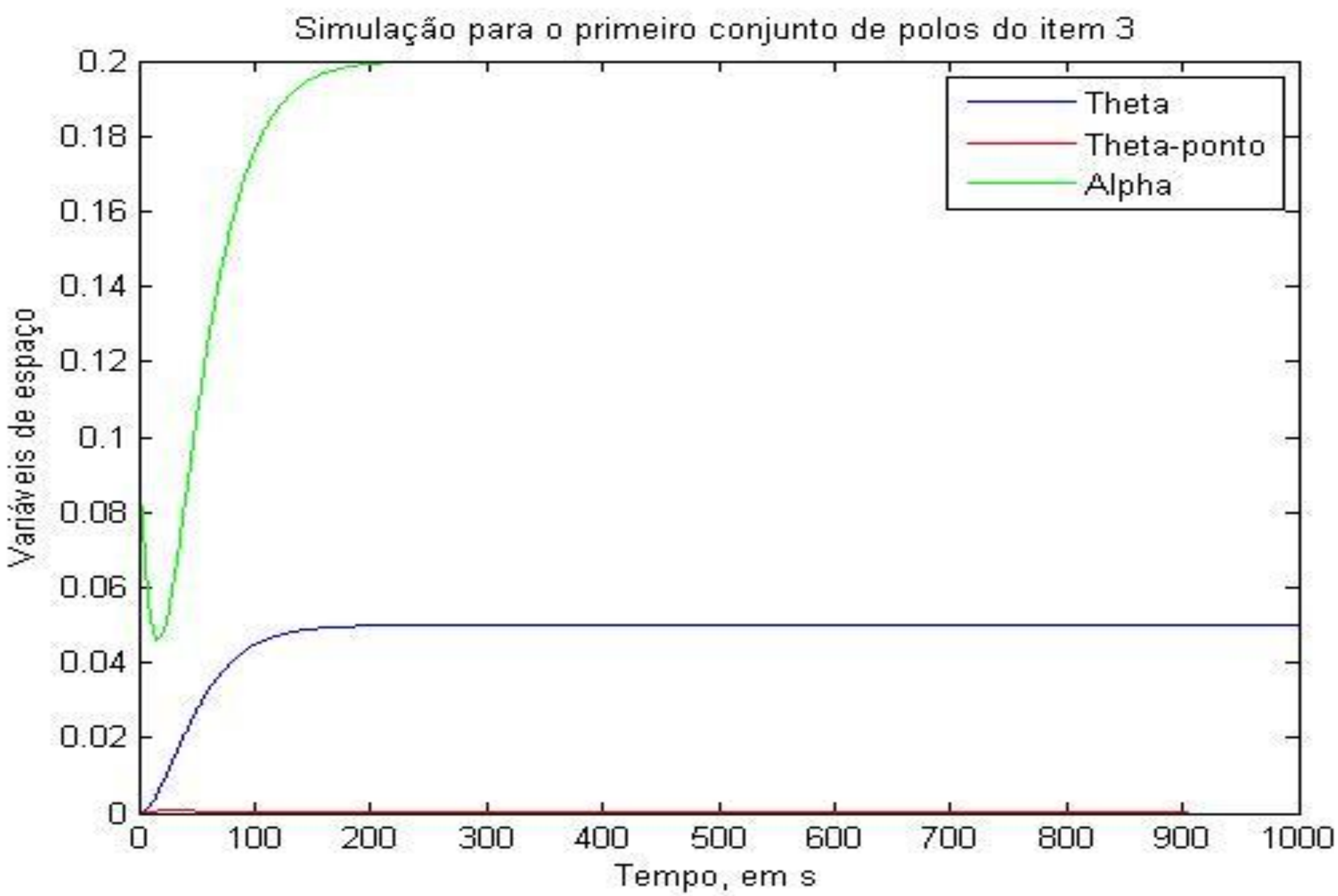
Kc1 – sem perturbação – x(0) = [0; 0; 0.1]



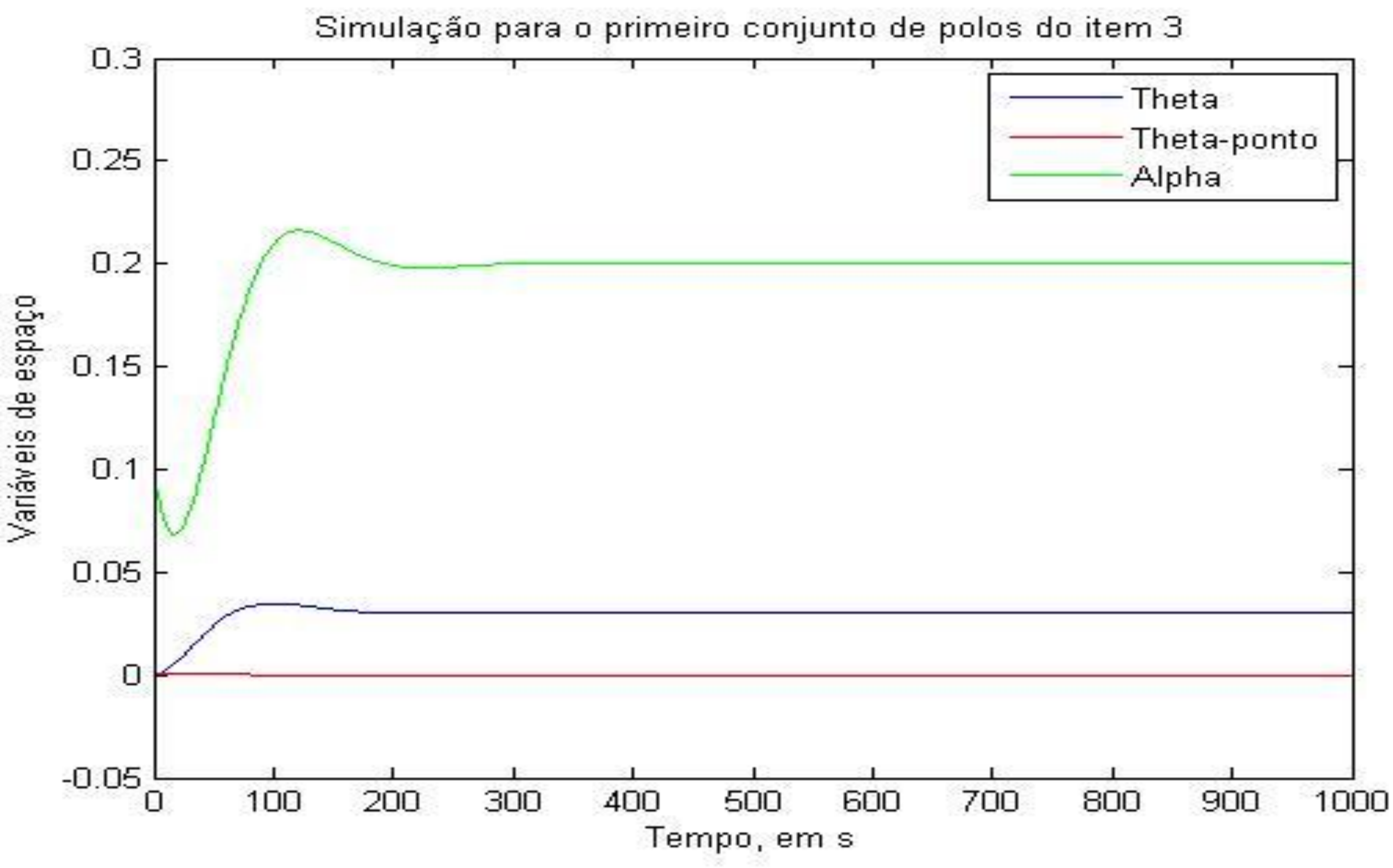
Kc2 – sem perturbação – x(0) = [0; 0; 0.1]



Kc1 – com perturbação – x(0) = [0; 0; 0.1]



Kc2 – com perturbação – x(0) = [0; 0; 0.1]



Blocos de controle e do observador de estado

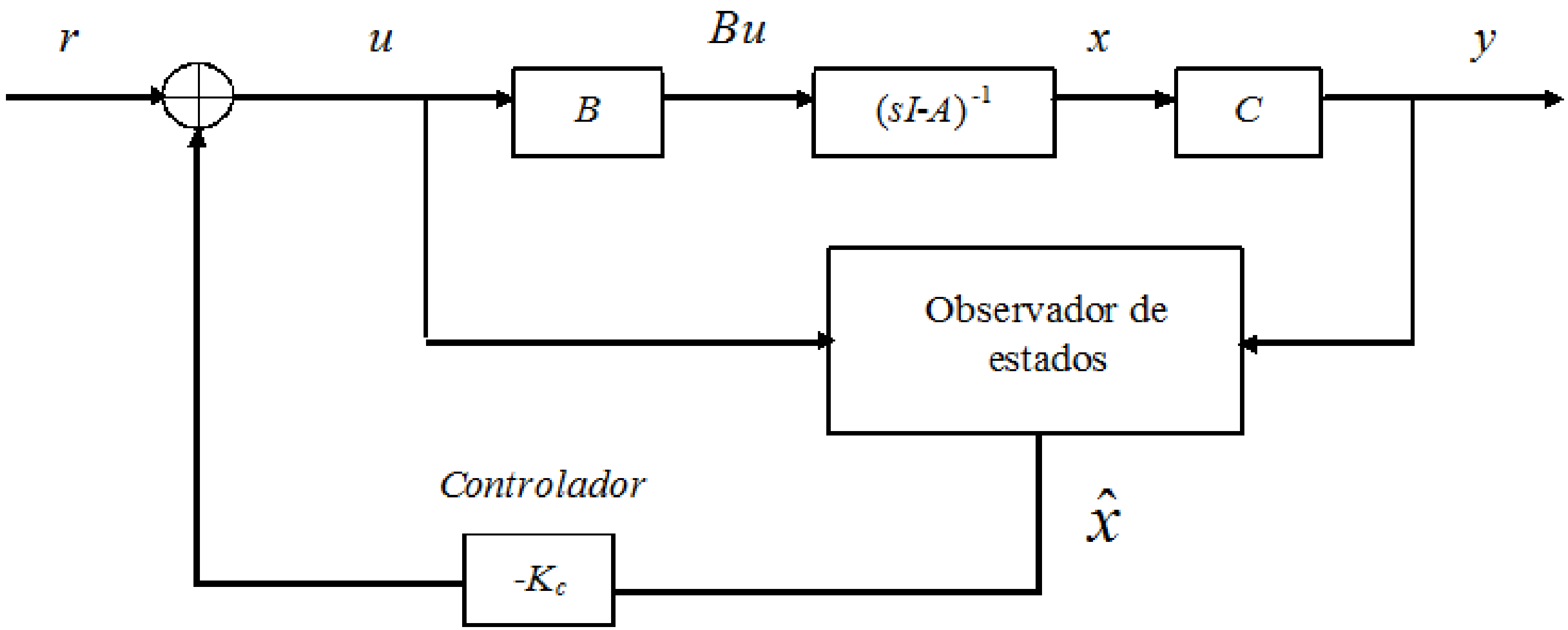


Diagrama de blocos do observador de estado

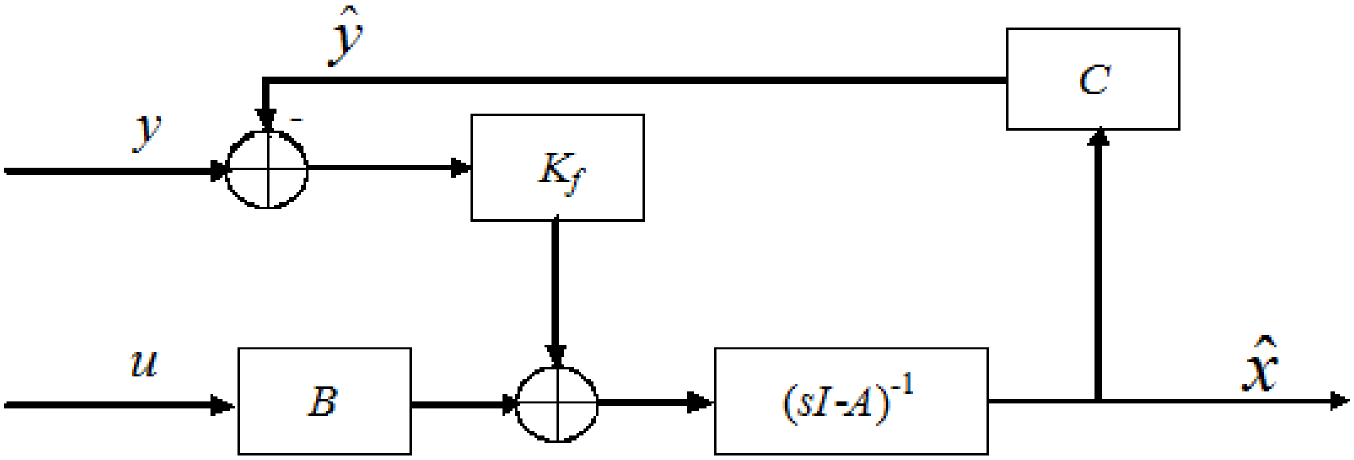
$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$u = r - K_c\hat{x}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - \hat{y})$$

$$\hat{y} = C\hat{x} \Rightarrow \dot{\hat{x}} = (A - K_f C)\hat{x} + Bu + K_f y$$



Equações de estado

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - [(A + K_f C)\hat{x} + Bu - K_f y]$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A + K_f C)x - (A + K_f C)\hat{x} = (A + K_f C)(x - \hat{x})$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A + K_f C)\tilde{x}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + B(r - K_c \hat{x})$$

$$\dot{x} = Ax + Br - BK_c(x - \tilde{x})$$

$$\dot{x} = (A - BK_c)x + BK_c \tilde{x} + Br$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_c & BK_c \\ 0 & A + K_f C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$\lambda\left(\begin{bmatrix} A - BK_c & BK_c \\ 0 & A + K_f C \end{bmatrix} \right) = \lambda(A - BK_c) \cup \lambda(A + K_f C)$$

$$\lambda(A + K_f C) = \lambda(A^T + C^T K_f{}^T)$$

Fómula de Ackermann:

$$Kf = \phi(A) W_o^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

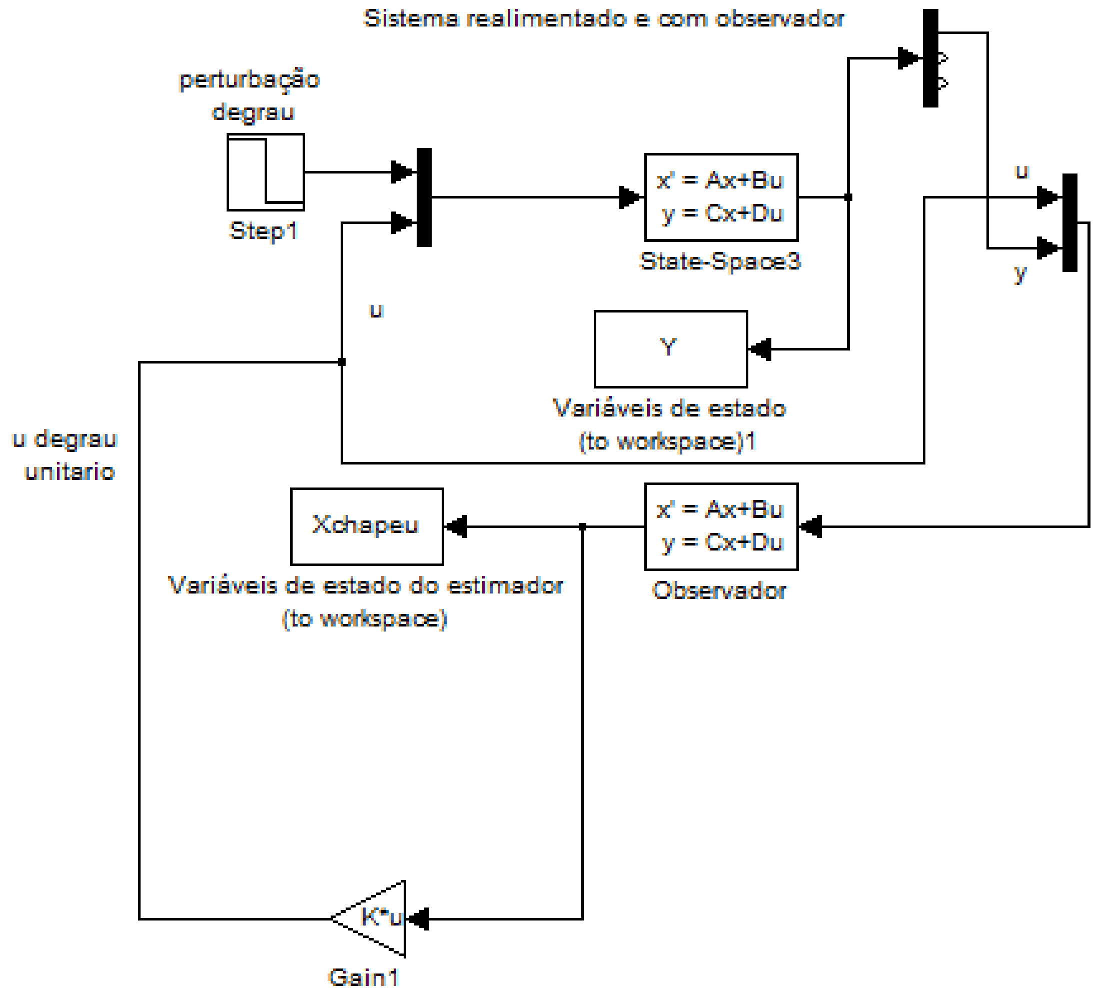
$\phi(A)$ é o polinômio característico obtido a partir dos polos desejado e avaliado em A.

Matrizes de ganho do observador

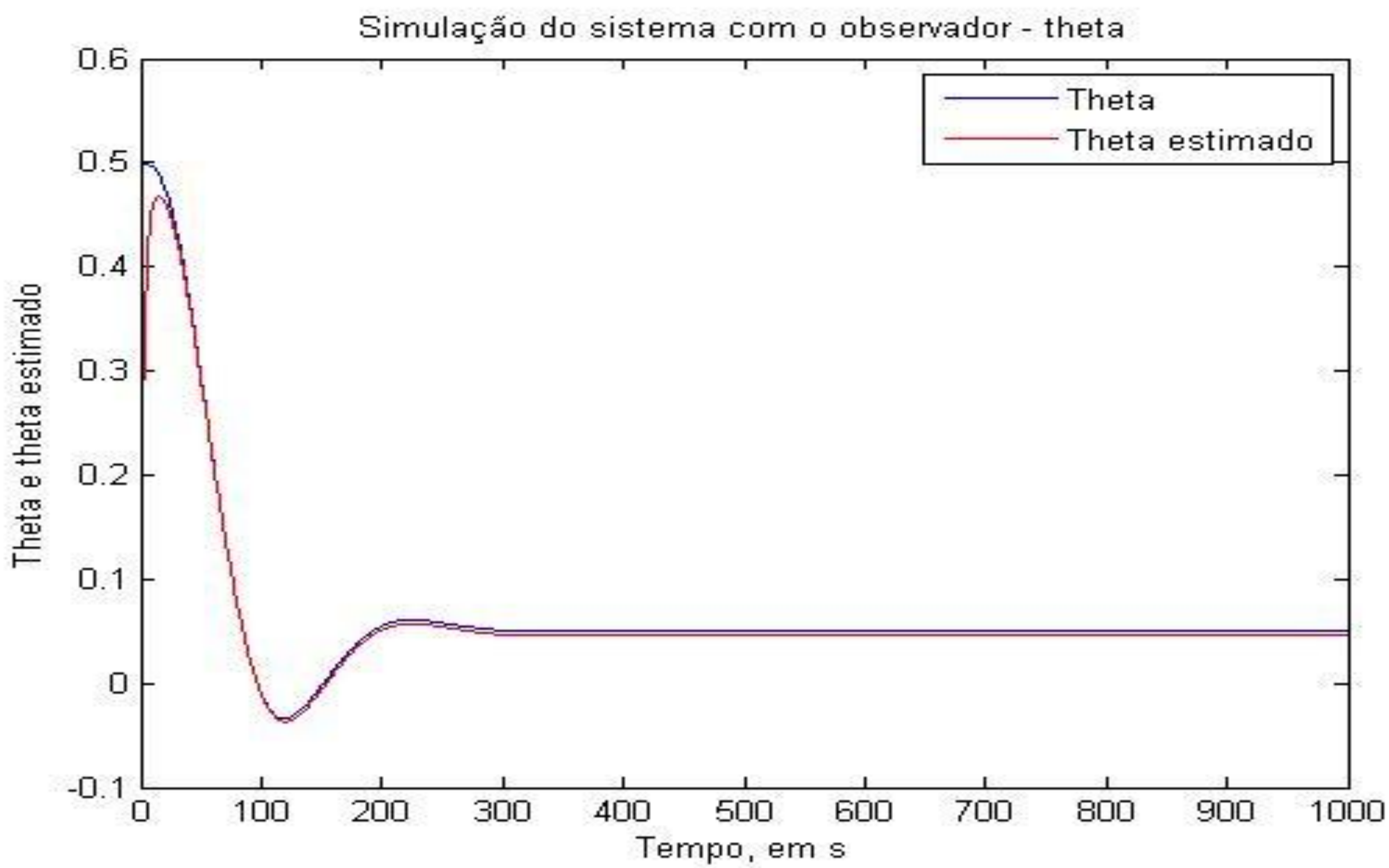
$$Kf1 = \begin{bmatrix} 0.3600 \\ -0.0116 \\ -0.2400 \end{bmatrix}$$

$$Kf2 = \begin{bmatrix} 0.5200 \\ 0.0396 \\ -2.1600 \end{bmatrix}$$

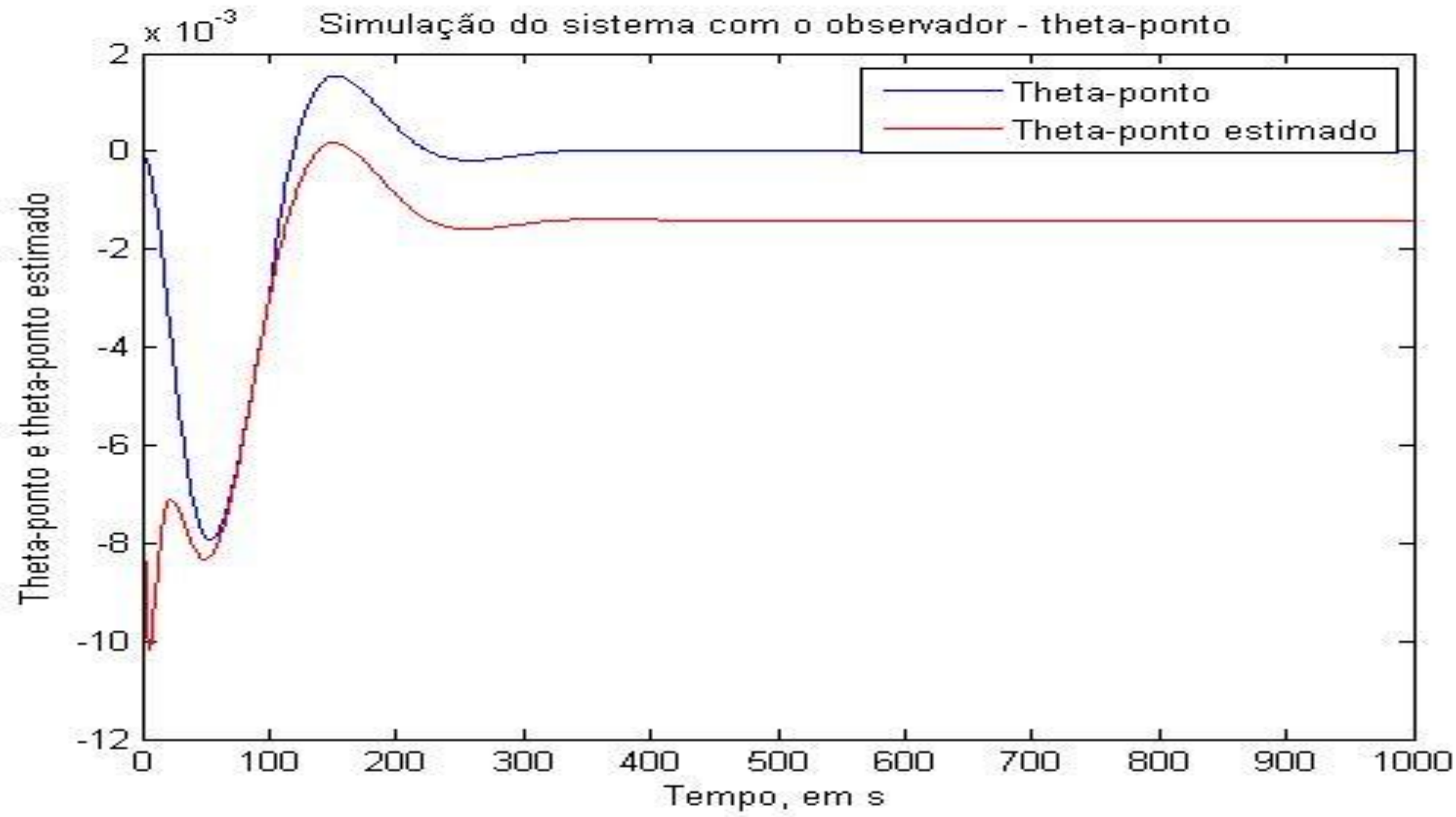
Diagrama de simulação do observador



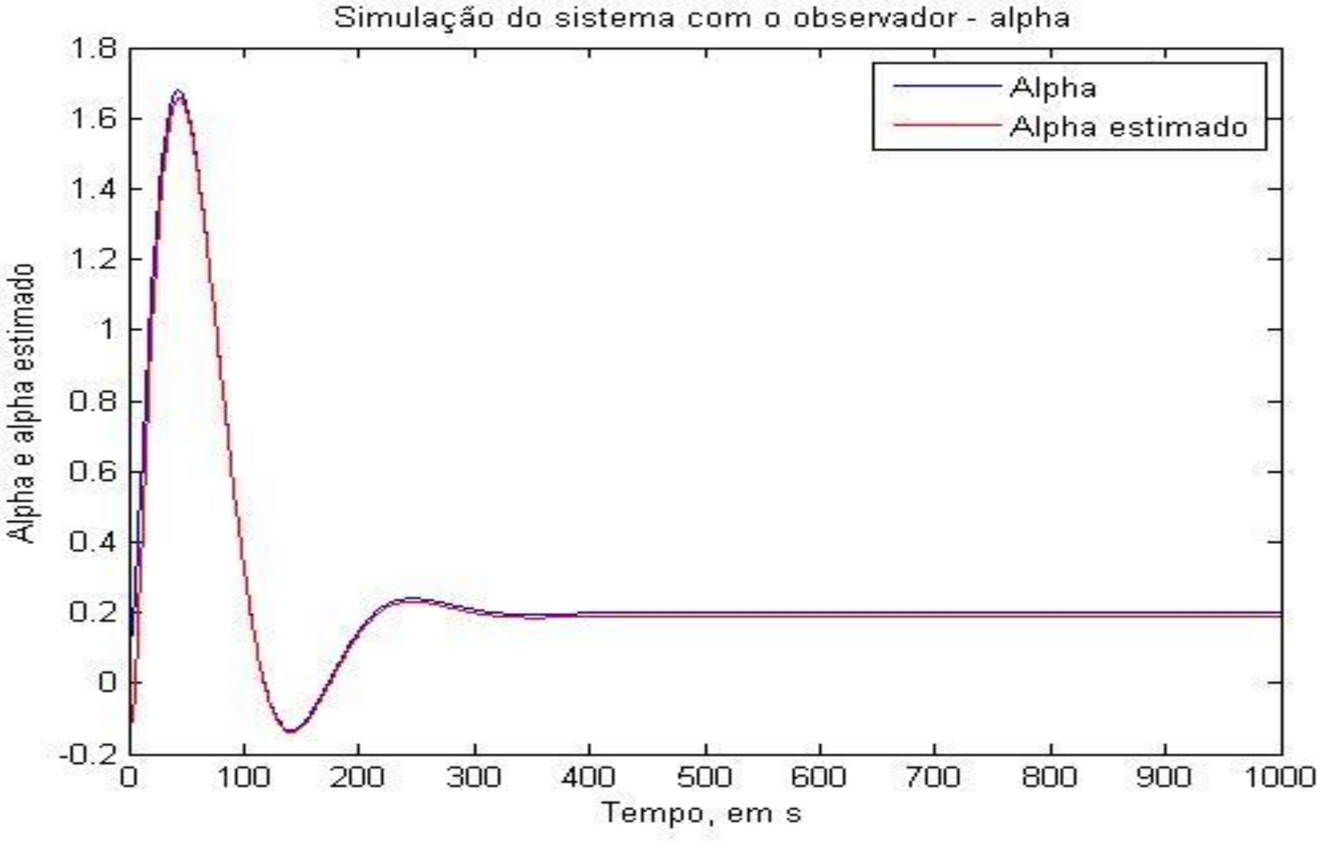
Observador – Kf1 – x(0)=[0.5; 0; 0.1]



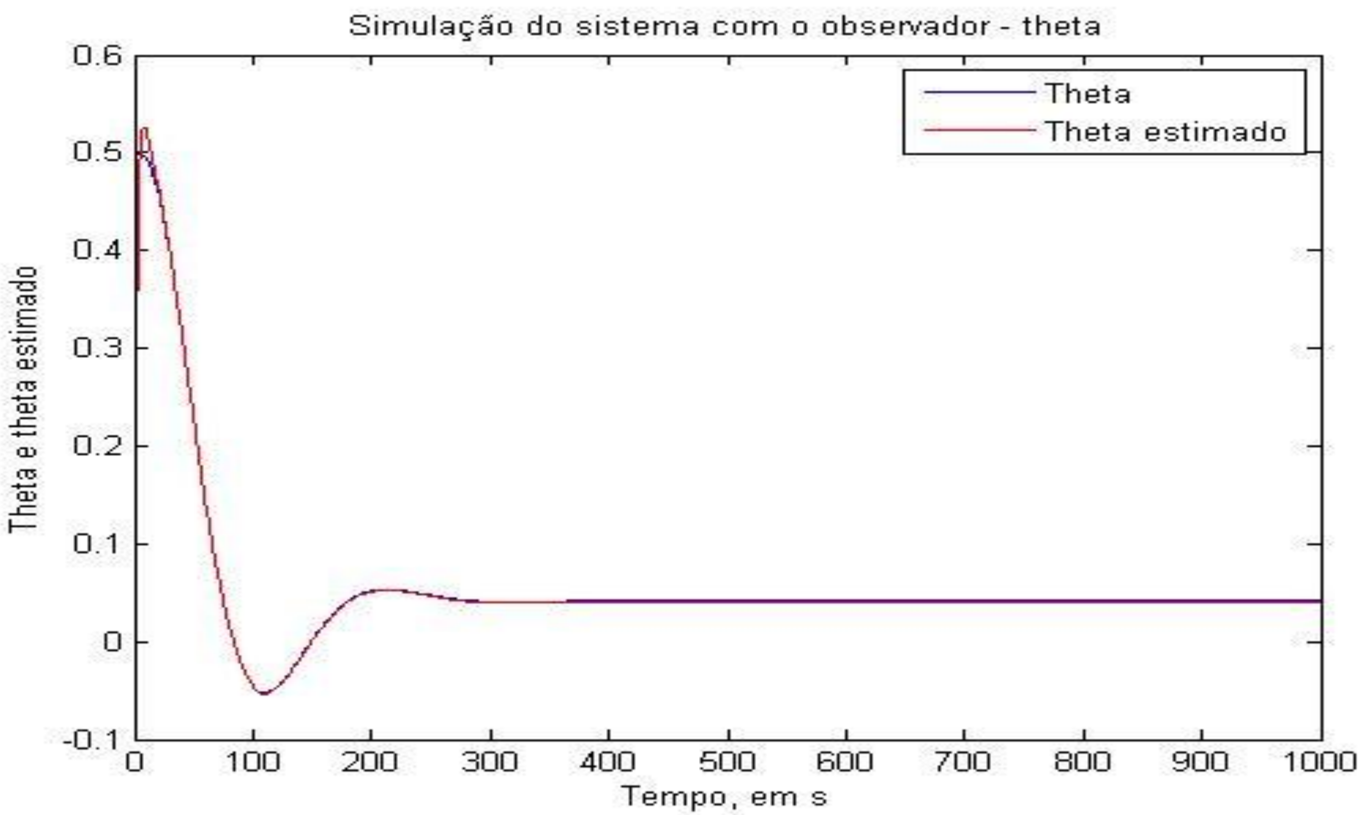
Observador – Kf1 – x(0)=[0.5; 0; 0.1]



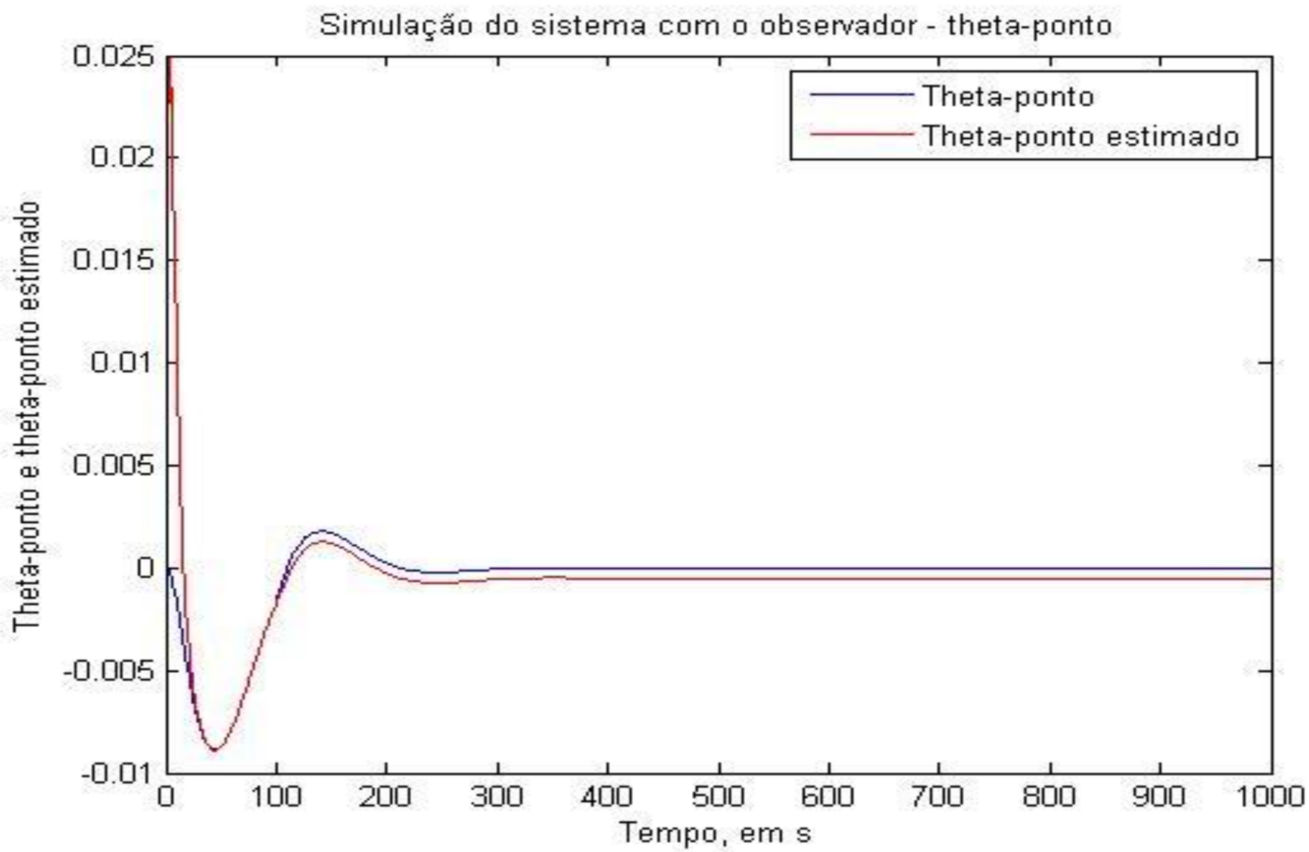
Observador – Kf1 – x(0)=[0.5; 0; 0.1]



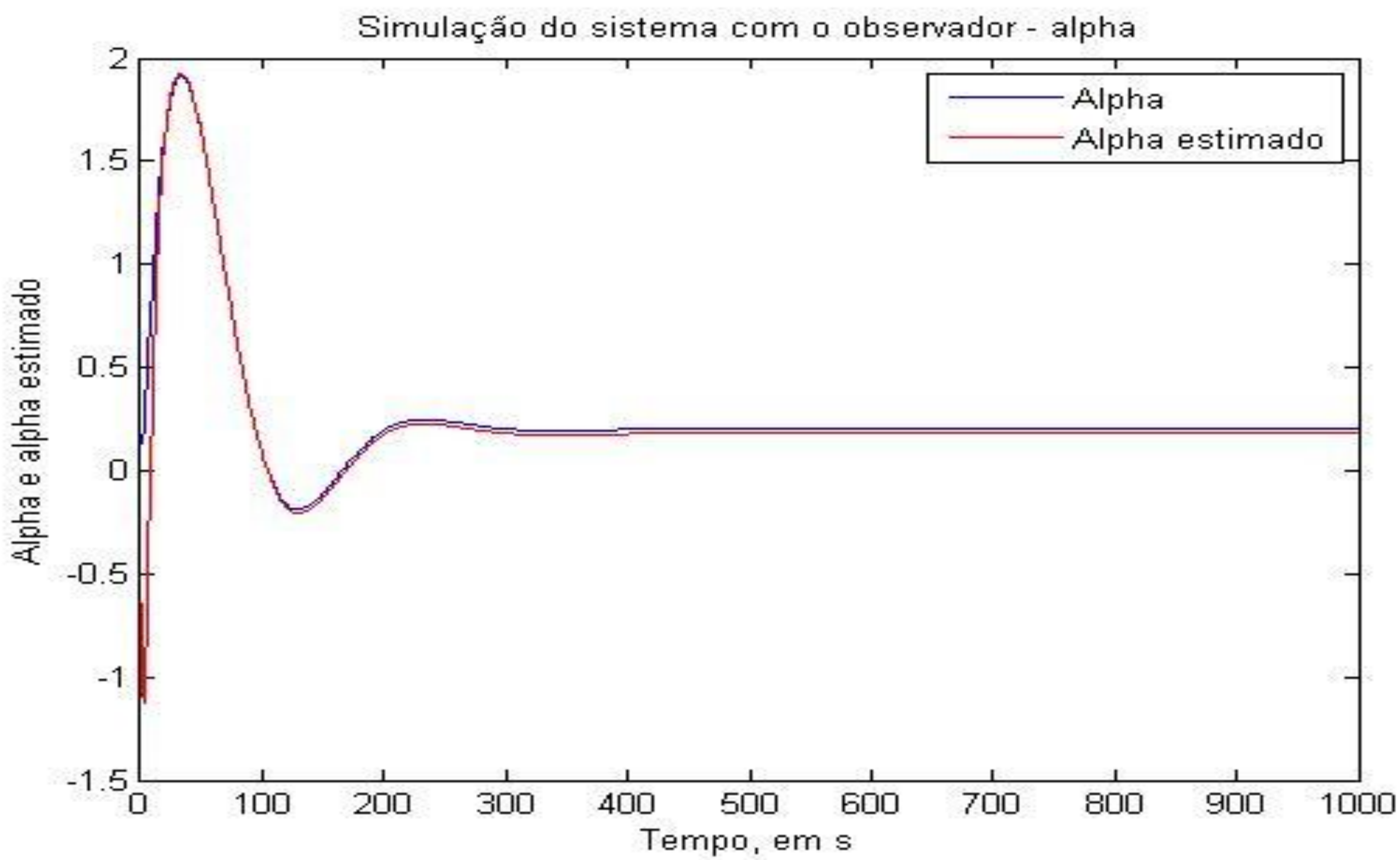
Observador – Kf2 – x(0)=[0.5; 0; 0.1]



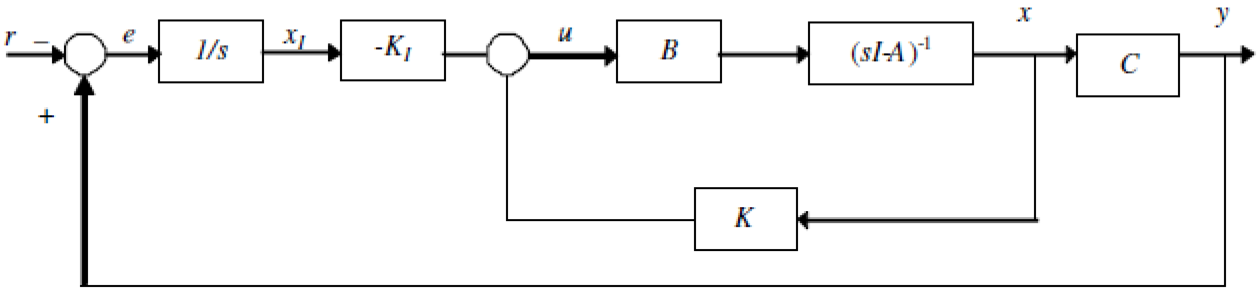
Observador – Kf2 – x(0)=[0.5; 0; 0.1]



Observador – Kf2 – x(0)=[0.5; 0; 0.1]



Adicionando um integrador



$$\dot{x} = Ax + B_1 u + B_2 w$$
$$y = Cx$$

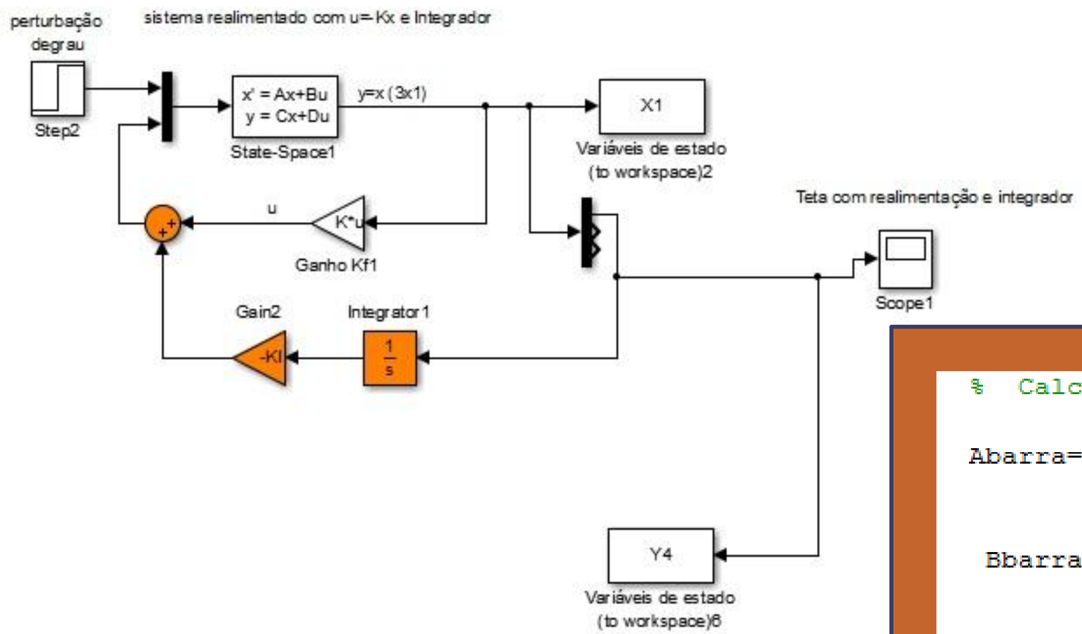
$$\dot{x}_I = Cx - r$$

$$x_I = \int_0^t e\, dt$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ B1 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ B2 \end{bmatrix} w$$

$$u = -\begin{bmatrix} K_I & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix}$$

Diagrama de simulação Realimentação +Integrador




```
%  Calculo da ação integral

Abarra=[0            1  0  0
        zeros(3,1)   A      ];

 Bbarra=[0
         B2] ;

 Kbarra=place(Abarra,Bbarra,[P2 -4])

KI=Kbarra(1);Kc=Kbarra(2:4);
```

Theta –ku Vs Theta Ki

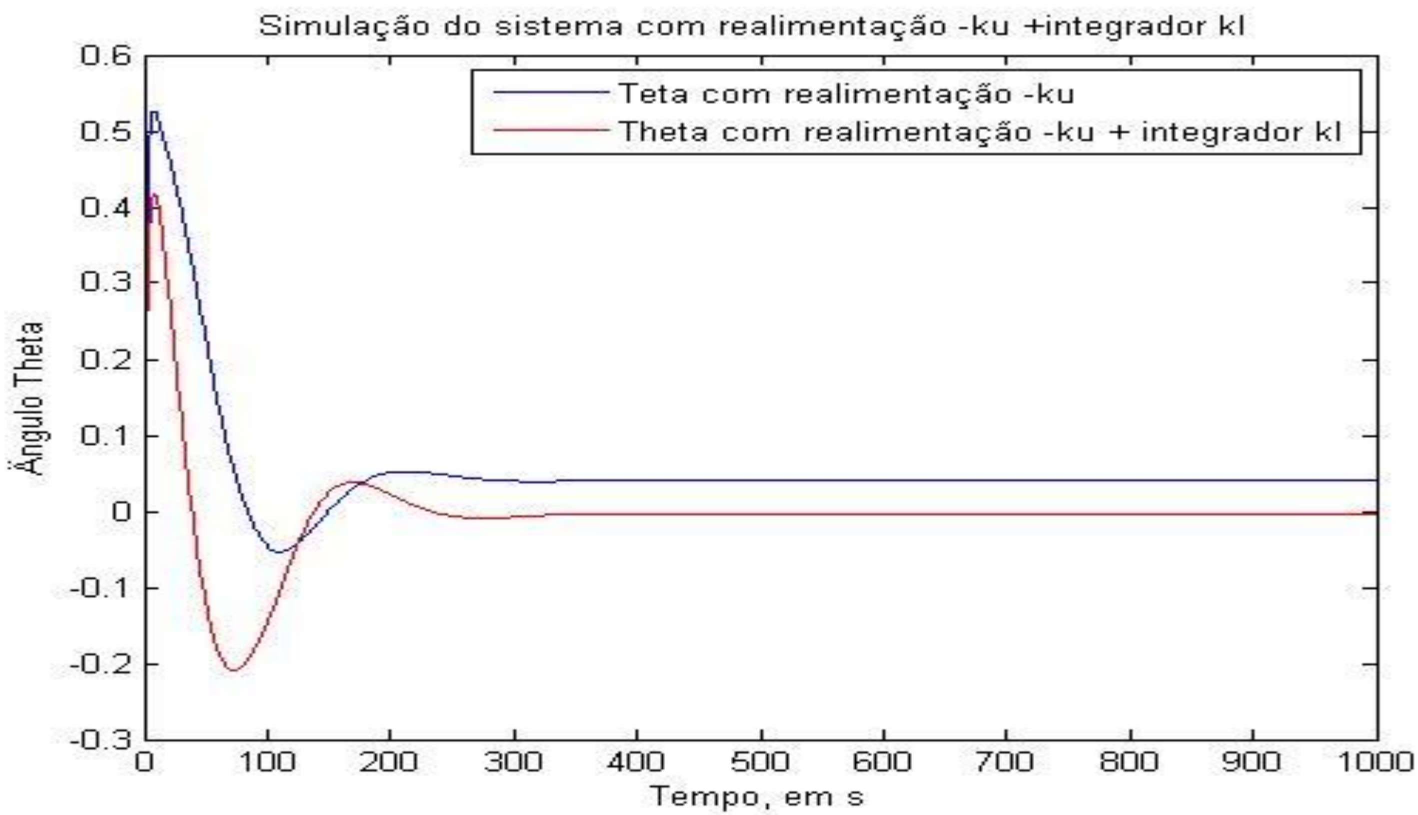
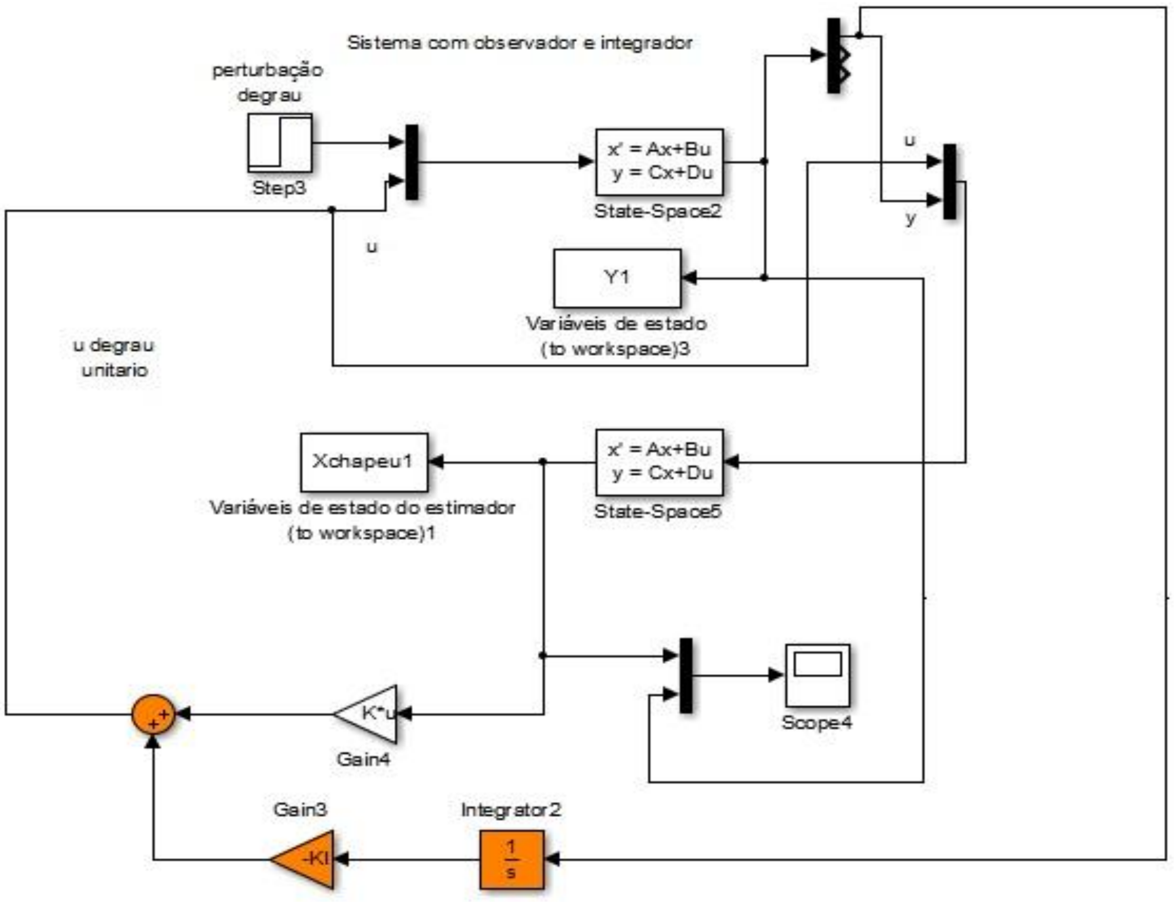


Diagrama de simulação Realimentação +Integrador



Theta estimado Vs Theta com KI