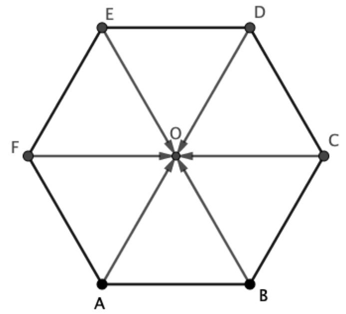
IME-USP
MAT105 – Geometria Analítica – 1/2020
T42 (IME), T21 (IF) – Profa. Ana Paula Jahn

Gabarito do Teste 1B

Questão 1 (1 ponto)
Seja *ABCDEF* um hexágono regular e centro no ponto *O*.
A soma dos seis vetores que têm por representantes segmentos orientados com origens em cada um dos vértices e extremidade no centro do referido hexágono é:

a) $\overrightarrow{AO}$
b) **$\vec{O}$ (vetor nulo)**
c) $6\overrightarrow{AO}$
d) $3\overrightarrow{AB}$



R: Alternativa **b)**
Por hipótese, *ABCDEFG* é hexágono regular e os triângulos em que fica dividido pelas diagonais são todos equiláteros.
Logo tem-se: $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{DO}$ (1), isto é, $\overrightarrow{AO}$ e $\overrightarrow{DO}$ são vetores opostos (segmentos orientados colineares, de mesmo módulo e sentidos opostos).
E, da mesma forma: $\overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{EO}$ (2), $\overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{FO}$ (3).
Por propriedades da adição de vetores (comutativa e associativa), e por (1), (2) e (3), tem-se:

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{FO} = \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DO}\right) + \left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{EO}\right) + \left(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{FO}\right) = \vec{O}$$

Questão 2 (2 pontos)
Com relação às afirmações abaixo, é correto afirmar que:

(a) Três pontos distintos *A*, *B* e *C* são colineares se, e somente se, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ são LD.

(b) As combinações lineares $a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2}$ e $b_1\overrightarrow{v_1} + b_2\overrightarrow{v_2}$ só podem ser iguais se $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$.

(c) Se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, então $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$

a) Todas são verdadeiras.
b) Todas são falsas.
c) **(a) e (c) são verdadeiras e (b) é falsa.**
d) (a) e (b) são verdadeiras e (c) é falsa.
e) (a) e (c) são falsas e (b) é verdadeira.

R: Alternativa **c)**

(a) Verdadeiro (V). De fato:

Se *A*, *B*, *C* são pontos colineares, pertencem a uma mesma reta *r*, e por consequência, os representantes $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente, são colineares, logo os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesma direção, e portanto, são LD.

E se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD, isso significa que têm a mesma direção (ou ainda, um é múltiplo escalar do outro). Ao tomar os representantes $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente, com mesma origem em A, os pontos *A, B* e *C* pertencem à mesma reta suporte ($\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BC}$).

(b) Falso (F). Contra-exemplo:

Sejam $\overrightarrow{v_1} = (1,2)$ e $\overrightarrow{v_1} = (-2,-4)$ dois vetores LD.
E sejam as seguintes combinações lineares (c.l.) de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$:

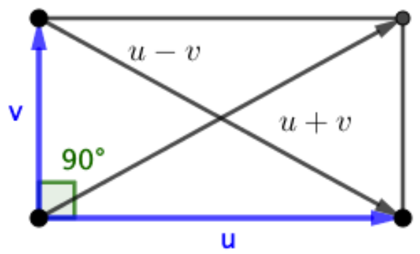
- $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$:
  $1(1,2) + 2(-2,-4) = (-3,-6)$

- $b_1 = 2$ e $b_2 = \frac{5}{2}$:
  $2(1,2) + \frac{5}{2}(-2,-4) = (-3,-6)$

Ambas resultam no mesmo vetor, com escalares diferentes.
Assim, tem-se $a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} = b_1\overrightarrow{v_1} + b_2\overrightarrow{v_2}$ com $a_1 \neq b_1$ e $a_2 \neq b_2$.

(c) Verdadeiro (V).

Geometricamente: (associando o vetor soma e o vetor diferença às diagonais de um retângulo determinado pelos dois vetores ortogonais dados).



Se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, então $\vec{u} \perp \vec{v}$, e o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$, com representantes na mesma origem, é a diagonal de um retângulo determinado por esses dois vetores (método do paralelogramo).

E $\vec{u} - \vec{v}$ corresponde à outra diagonal do mesmo retângulo e, portanto, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.

Algebricamente:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\,\|^2 = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle =$$
$$= \|\vec{u}\,\|^2 + \|\vec{v}\,\|^2 \ (1)$$

Como, por hipótese $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, tem-se $2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

Analogamente:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\,\|^2 = \langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle =$$
$$= \|\vec{u}\,\|^2 + \|\vec{v}\,\|^2 \ (2)$$

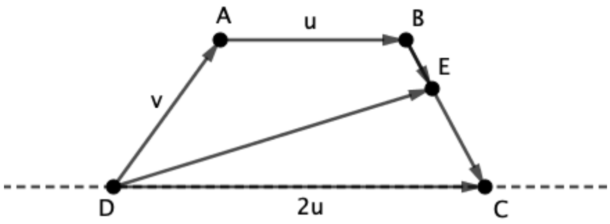
Logo, (1) = (2) e como $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ e $\|\vec{u} - \vec{v}\|$ são reais positivos, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.

Questão 3 (1 ponto)

Seja um quadrilátero *ABCD* tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{DC} = 2\vec{u}$ e $\overrightarrow{DA} = \vec{v}$. O ponto E é tal que $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. O vetor $\overrightarrow{DE}$ pode ser escrito em função de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ por:	a) $\frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v})$ **b) $\frac{2}{3}(2\vec{u} + \vec{v})$** c) $\frac{4}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}$ d) $\frac{2}{3}(\vec{u} + \vec{v})$

R: Alternativa **b)**

Note que o quadrilátero *ABCD* é um trapézio: $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$, logo $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ (mesma direção).



$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} =$$
$$= \vec{v} + \vec{u} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} =$$
$$= \vec{v} + \vec{u} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) =$$
$$= \vec{v} + \vec{u} + \frac{1}{3}(-\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{u}) =$$
$$= \vec{v} + \vec{u} + \frac{1}{3}(\vec{u} - \vec{v}) = \frac{4}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v} =$$
$$= \frac{2}{3}(2\vec{u} + \vec{v})$$

Questão 4 (1 ponto)

Dados os conjuntos $A = \{(-3,0,4), (5,-1,2), (1,1,3)\}$; $B = \{(2,-1,4), (-4,10,2)\}$ e $C = \{(-2,-2,4), (1,1,0), (2,2,2)\}$, é correto afirmar que:

(a) Todos são LD
(b) **A e B são LI**
(c) A e C são LI
(d) B e C são LI
(e) Somente A é LI

R: Alternativa **(b)**

i) $A = \{(-3,0,4), (5,-1,2), (1,1,3)\}$

$$a(-3,0,4) + b(5,-1,2) + c(1,1,3) = (0,0,0)$$
$$S: \begin{cases} -3a + 5b + c = 0 & (1) \\ -b + c = 0 & (2) \\ 4a + 2b + 3c = 0 & (3) \end{cases}$$

De (2) tem-se: $b = c$ (4)

Substituindo (4) em (1) e (3), e resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} -3a + 6b = 0 \; (5) \\ 4a + 5b = 0 \; (6) \end{cases}$$

Fazendo 4.(5)+3.(6), tem=se: $b = 0$.
De (4): $c = b = 0$. E substituindo em (1) tem-se: $a = 0$.
Como o sistema só tem a solução trivial (SPD), o conjunto de vetores é LI.

Ou, usando o determinante da matriz dos coeficientes do sistema S (cf. regra de Cramer):

$$det\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 20 + 4 + 6 = 39 \neq 0 \Longrightarrow SPD \ \Longrightarrow LI$$

Logo, $A = \{(-3{,}0{,}4), (5, -1{,}2), (1{,}1{,}3)\}$ é LI e constitui uma base do $\mathbb{R}^3$.

ii) $B = \{(2, -1{,}4), (-4{,}10{,}2)\}$, como os vetores não são colineares (paralelos), o conjunto é LI. Mas, não constituem uma base do $\mathbb{R}^3$ (são coplanares e geram um plano do espaço)

iii) $C = \{(-2, -2{,}4), (1{,}1{,}0), (2{,}2{,}2)\}$

$$a(-2, -2{,}4) + b(1{,}1{,}0) + c(2{,}2{,}2) = (0{,}0{,}0)$$

$$S: \begin{cases} -2a + b + 2c = 0 \ \ (1) \\ -2a + b + 2c = 0 \ \ (2) \\ 4a + 0b + 2c = 0 \ \ (3) \end{cases}$$

Como (1)=(2), o Sistema é Possível e Indeterminado (SPI). De fato:
De (3), tem-se: $c = -2a$ (4)
Substituindo (4) em (1), tem-se: $-2a + b - 4a = 0 \ \Longrightarrow b = 6a$

$S = \{(a, 6a, -2a), a \in \mathbb{R}\}$

Como o sistema tem infinitas soluções (SPI), o conjunto de vetores é LD.
Ou, usando o determinante da matriz dos coeficientes do sistema S (cf. regra de Cramer):

$$det\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow SPI \ \Longrightarrow LD$$

Questão 5 (1 ponto)
Sejam os pontos $P = (2, 1, -8)$ e $Q = (7, -4, 2)$. As coordenadas do ponto X que divide o segmento de reta $\overline{PQ}$ na razão 2 para 3, a partir de P, são:

a) **(4, -1,-4)**
b) (-4, 1, 4)
c) (-2, 2,-4)
d) (2,-2, 4)

R: Alternativa **a)**

X é tal que $\overrightarrow{PX} = \frac{2}{5}\overrightarrow{PQ}$.

Com isso, tem-se: $X - P = \frac{2}{5}\overrightarrow{PQ}$

Em coordenadas: $X = P + \frac{2}{5}\overrightarrow{PQ}$

$X = (2,1,-8) + \dfrac{2}{5}(5,-5,10)$

$X = (4,-1,-4)$

Questão 6 (1 ponto)

Seja o triângulo de vértices $A = (3,4,4)$, $B = (2,-3,4)$ e $C = (6,0,4)$. O ângulo externo ao vértice *B* tem por medida (em graus):

a) 45
b) 90
c) **135**
d) 150

R: Alternativa **c)**

Seja θ o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{BA} = (1,7,0)$ e $\overrightarrow{BC} = (4,3,0)$:

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle}{\|\overrightarrow{BA}\|\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{4+21}{5\sqrt{2}.5} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = 45°$$

θ é o ângulo interno ao vértice *B*, logo o externo é: $135°$ (suplementar de θ).

Questão 7 (2 pontos)

As coordenadas do vetor $\vec{v}$ de norma 4 (u.c.), ortogonal ao eixo *OZ* e que forma ângulo de 60º com o vetor $\vec{\imath}$ e ângulo obtuso com $\vec{\jmath}$ são:

a) $(1, -\sqrt{3}, 0)$
b) $(1, \sqrt{3}, 0)$
c) $\mathbf{(2, -2\sqrt{3}, 0)}$
d) $(2, 2\sqrt{3}, 0)$

R: Alternativa **c)**

Seja $\vec{v} = (x, y, z)$. De acordo com o enunciado:

$$\|\vec{v}\| = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 16 \ (1)$$

$\vec{v} \perp OZ \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{k} \Leftrightarrow \langle \vec{v}, \vec{k} \rangle = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (2)

$$\cos 60 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{\imath} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{\imath}\|} = \frac{x}{4} \Leftrightarrow x = 2 \ (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1), tem-se o valor de y:

$0^2 + y^2 + 2^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{3}$

Assim, $\overrightarrow{v_1} = \left(2, 2\sqrt{3}, 0\right)$ ou $\boldsymbol{\overrightarrow{v_2} = \left(2, -2\sqrt{3}, 0\right)}$

Mas, como $\vec{v}$ forma ângulo obtuso com $\vec{\jmath}$, então $\langle \vec{v}, \vec{\jmath} \rangle < 0$, e portanto, somente $\overrightarrow{v_2}$ satisfaz.

Questão 8 (1 ponto)

Dados os pontos A=(1,0,-1), B=(4,2,1) e C=(1,2,0), os valores de *m* para que $\|\vec{v}\| = 7$, sendo $\vec{v} = m\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$, são:

a) -3 e 13/5

b) 2 e 5

c) -2 e 5

d) **3 e -13/5**

Resposta: Alternativa **d)**

$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 2, 1)$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (-3, 0, -1)$

$\vec{v} = m\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = m(0,2,1) + (-3,0,-1) = (-3, 2m, m - 1)$

$\|\vec{v}\|^2 = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 9 + 4m^2 + (m - 1)^2 = 49$

$9 + 4m^2 + m^2 - 2m + 1 - 49 = 0$

$5m^2 - 2m - 39 = 0$

Resolvendo a equação, tem-se $m = 3$ ou $m = -\frac{13}{5}$.