Matrizes e transformações lineares

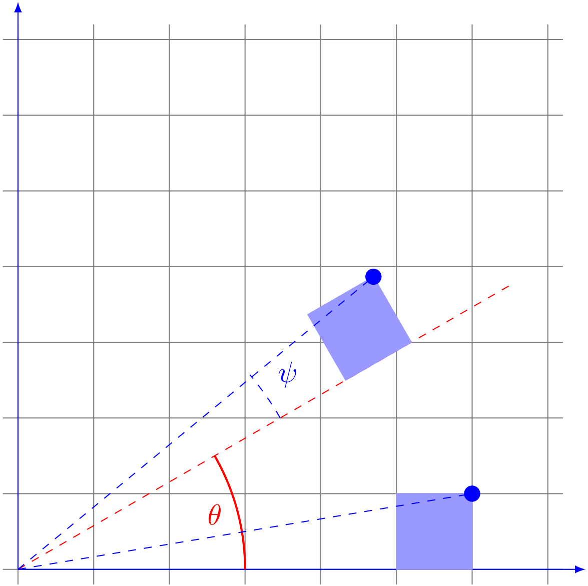
MAP 2110 - Diurno

IME USP

7 de julho de 2020

- Transformações entre espaços são importantes em Geometria.
- As transformações importantes são aquelas que preservam algumas propriedades da figura transformada.
- Em geral classificamos as transformações em grupos.
- É importante dar uma fórmula para as transformações, e aí entram as matrizes.

Rotações no plano



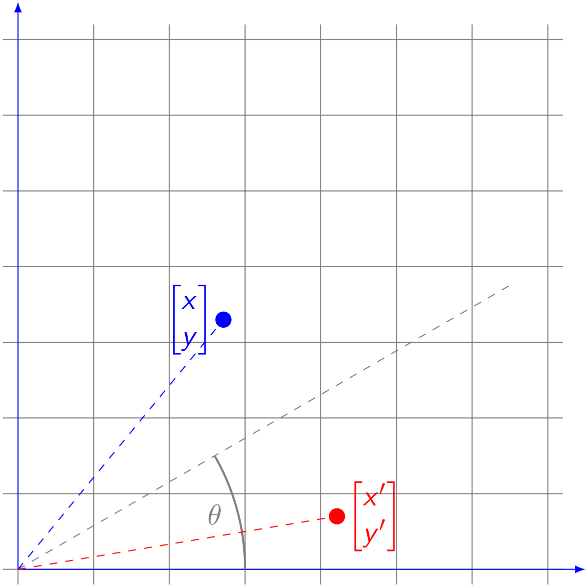
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{bmatrix}$$

rodando no sentido anti-horário

$$R_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta+\psi) \\ \sin(\theta+\psi) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi - \sin\theta\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi + \cos\psi\sin\theta \end{bmatrix} \implies$$

$$R_\theta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos\psi \\ r\sin\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Simetria em relação a uma reta



Se $\theta = 0$ buscamos simplesmente a simetria em relação ao eixo x.

$$S_0 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

No caso geral: rodamos no sentido horário (ou outro, tanto faz), até a reta ficar paralela ao eixo x aplicamos a simetria e rodamos de volta no outro sentido. Isto é, vamos usar que:

$$S_\theta = R_\theta S_0 R_{-\theta}$$

então

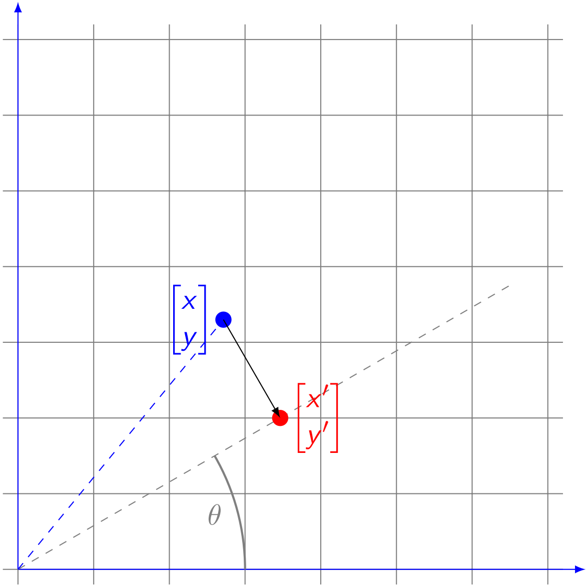
$$S_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$S_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & -(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou

$$S_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Projeção ortogonal



$$P_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \text{ queremos achar } a$$

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = 0$$

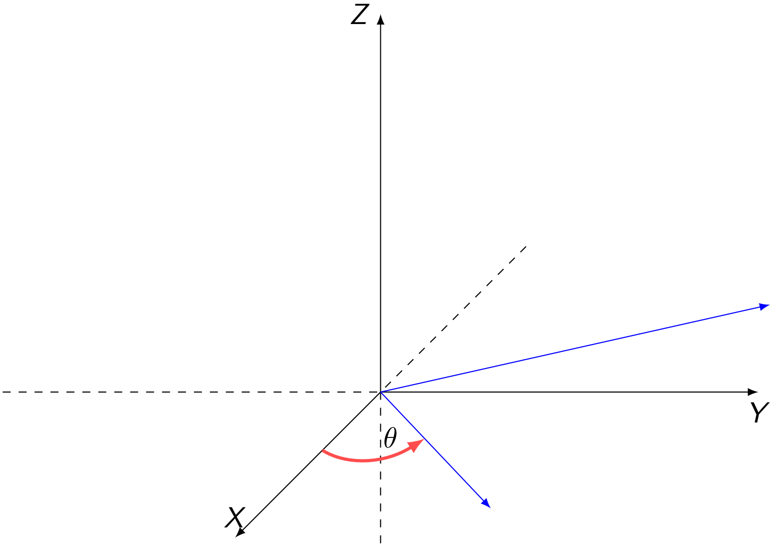
$$a = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$P_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos^2\theta + y\sin\theta\cos\theta \\ x\cos\theta\sin\theta + y\sin^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

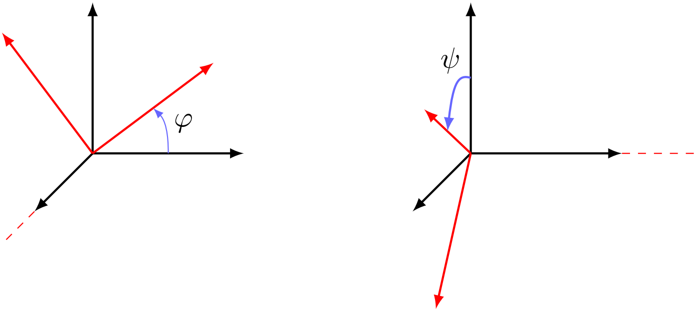
1. A toda matriz está associada uma aplicação linear:
2. A toda aplicação linear está associada uma matriz

1. $A \mapsto T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$
2. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mapsto A = [a_{ij}]$ como $a_{ij} = [T(\mathbf{e}_j)]_i$

Rotações em $\mathbb{R}^3$

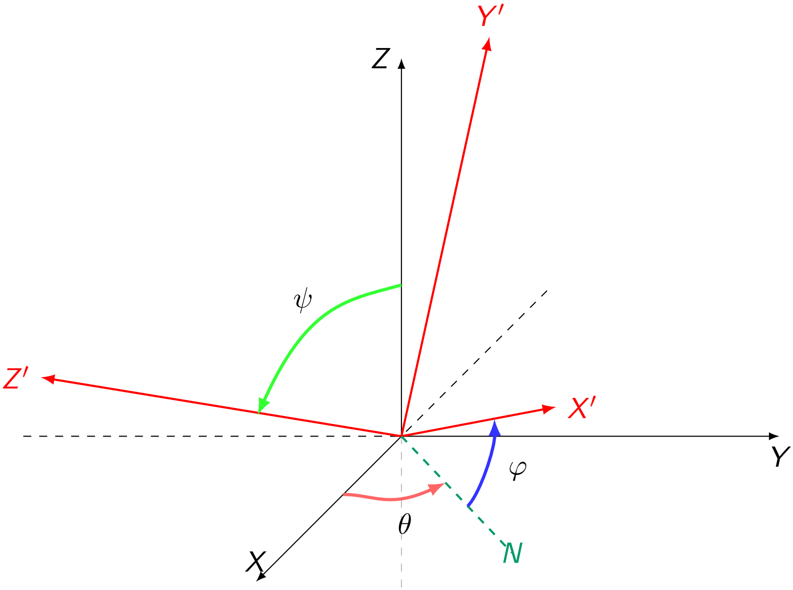


$$R^3_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$


φ
ψ

$$R^1_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \text{ e } R^2_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix}$$

Ângulos de Euler



Podemos combinar estas rotações para escrever uma rotação genérica como:

$$R = R^3_\varphi R^1_\psi R^3_\theta =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$