Wesley Francisco de Lima
10264060

SEMINARIO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS-MAT 450 - 1^a Prova - 1^o semestre de 2020 - 26/06/2020

Prof: Antônio Luiz Pereira

Questões	Nota
Q_1	
Q_2	
Q_3	
Q_4	
Q_5	
Q_6	

Respostas a partir da página 4.

Escolha problemas somando NO MÁXIMO 10 pontos. Justifique todas as suas afirmações.

Problema 1 (2 pontos) Mostre que, se $a \geq -1$ é um número real n é um número natural, então vale a desigualdade: $(1+r)^n \geq 1+nr$.

Problema 2. (2,5 pontos) Imagine 100 armários numerados de 1 a 100, e 100 pessoas. Suponha que a primeira pessoa passa e abre todos os armários. Em seguida a segunda fecha a porta dos armários com números pares. Depois disso, a terceira passa e troca o estado das portas dos armários cujos números são múltiplos de 3 (isto é, fecha os abertos e abre os fechados com numeração múltipla de 3). Esse procedimento (isto é: a n-ésima pessoa troca o estado das portas dos armários cujos números são múltiplos de

n) é repetido até a centésima pessoa. Quais dos armários ficarão abertos?

Problema 3. (2,5 pontos) Considere um tetraedro regular. Sejam r_1 o raio da esfera inscrita no tetraedro, r_2 o raio da esfera que tangencia as arestas do tetraedro e r_3 o raio da esfera circunscrita ao tetraedro. Demonstre que r_1, r_2 e r_3, nesta ordem, estão em progressão geométrica.

Problema 4. (2,5 pontos) Uma aranha vivia na superfície do cubo. Estando um dia sobre uma das faces, percebeu que na face oposta estava pousada uma mosca, conforme indicado na figura. Qual deve ser o trajeto da aranha, de modo a atingir a mosca, percorrendo a menor distância possıhvel?

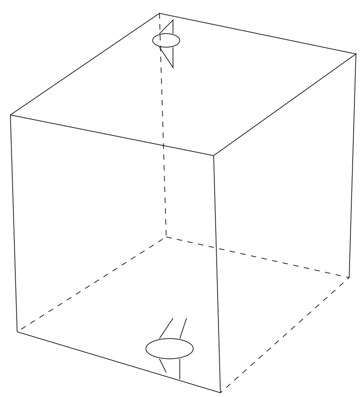


FIGURE 1. Aranha

Problema 5. (2,5 pontos) Quantas são as soluções inteiras positivas da equação: $x + y + z = 20$?

Problema 6 (3 pontos) Mostre que só existe um número finito de soluções inteiras para a equação

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1000}.$$

Problema 1

A prova será feita por indução finita em $n \in \mathbb{N}$.

• Caso inicial ($n=1$): $(1+r)^1 \geq 1 + 1\cdot r$ é uma desigualdade válida.

• Vamos supor que, se $n = k$, $(1+r)^k \geq 1 + kr$ (∗) seja verdade.

• Veremos o que acontece com a desigualdade considerando o sucessor de k:

$$(1+r)\cdot(1+r)^k \geq (1+kr)\cdot(1+r)$$

$$\Rightarrow \quad (1+r)^{k+1} \geq 1 + r + kr + kr^2$$

$$\Rightarrow \quad (1+r)^{k+1} \geq 1 + (k+1)r + kr^2$$

Aqui a prova já está no fim, pois (∗) é válida pela hipótese e multiplicamos ambos os lados da desigualdade por $(1+r) \geq 0$ $[r \geq -1]$, o que torna

$$(1+r)^{k+1} \geq 1 + (k+1)r$$

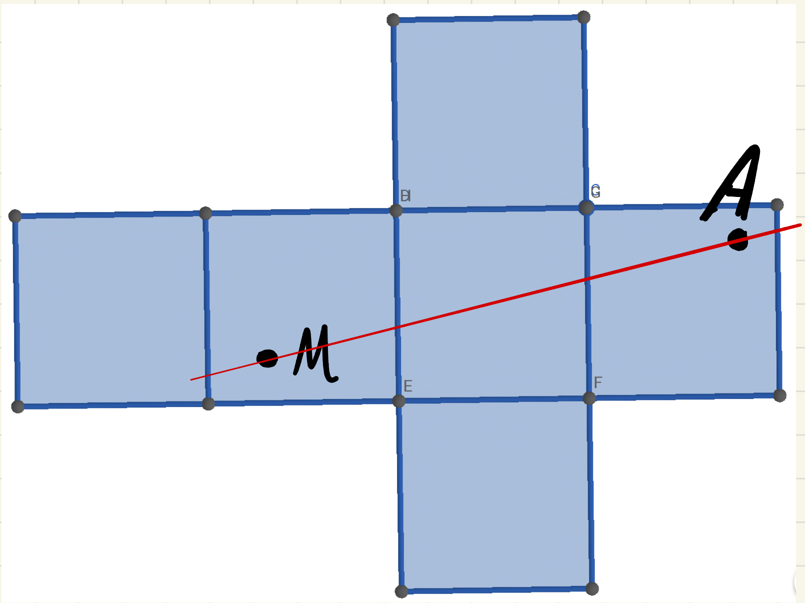
verdadeira (pois, como $kr^2 > 0$, $1 + (k+1)r < 1 + (k+1)r + kr^2$)

Como conclusão e embasados pelo PIF, podemos afirmar que a desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 4

Sabemos que a menor distância possível entre dois pontos é uma reta.

Nesse caso, podemos planificar o cubo e obter:



Fonte: O Autor, produzido com geogebra 3D.

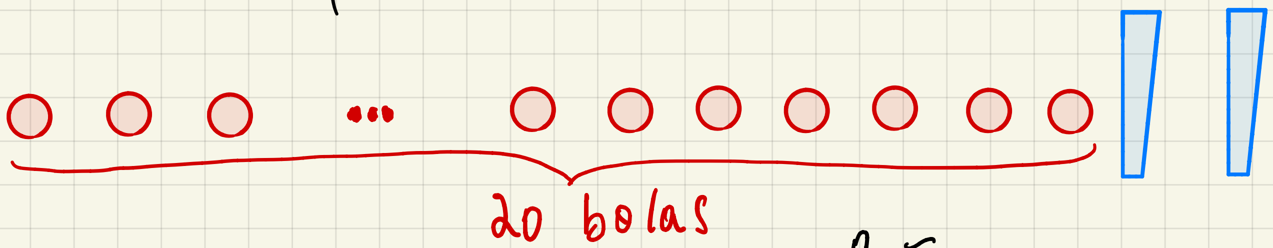
Vamos supor que a aranha esteja no ponto A e a mosca no ponto M.

O segmento $\overline{AB}$ acima, em vermelho, é o trajeto que a aranha deve percorrer para andar a menor distância até a mosca. Como o segmento está contido na planificação, o percurso estaria contido na superfície do sólido.

As distâncias percorridas na planificação e na superfície do cubo serão as mesmas, pois é possível fazer uma planificação apenas usando isometrias (rotações, translações e etc.) convenientes.

Problema 5

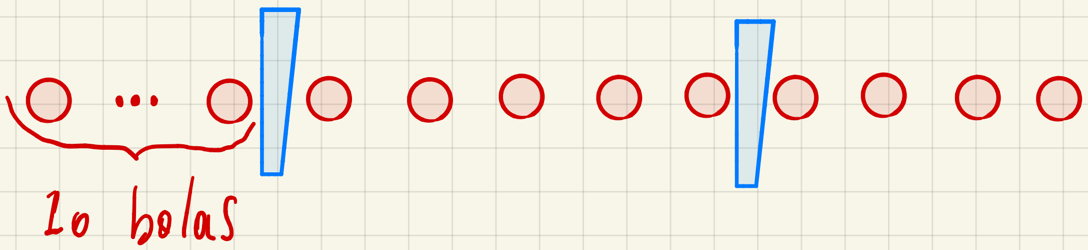
Podemos pensar que temos 2 separadores e 20 bolinhas. Conforme o ilustrado:



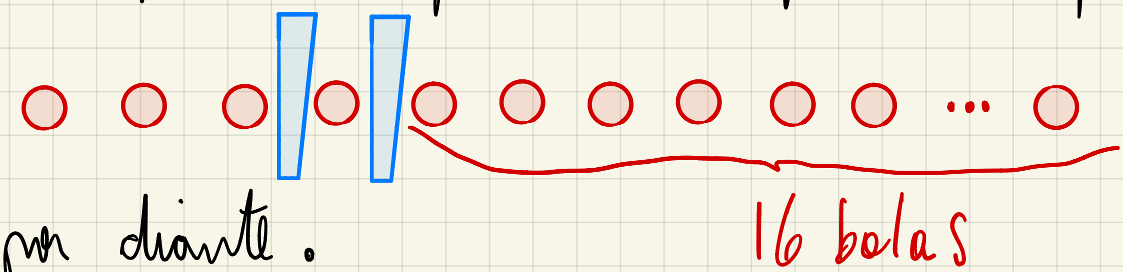
Ou seja, se temos a solução

$$x = 11, \quad y = 5 \quad e \quad z = 4$$

podemos representá-la por:



$x = 3$, $Y = 1$, $z = 16$ poderá ser representado por:



e assim por diante.

Ou seja, o total de soluções pode ser obtido pela contagem de quantas permutações nós podemos fazer com esses 22 objetos. Entretanto, há um detalhe nesse raciocínio, pois, da forma representada acima, as soluções em que ou x, ou y, ou z são zero estão englobadas.

Devemos descartar tais soluções em que alguma das incógnitas vale zero.

60 soluções precisam ser descartadas, pois as soluções que contêm zero são da forma:

$x = 0$ ou $y = 0$ ou $z = 0$

Há 21 possibilidades para cada uma das três variáveis.

$(0, 0, 20)$	$(0, 0, 20)$	$(20, 0, 0)$
$(0, 1, 19)$	$(1, 0, 19)$	$(19, 1, 0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(0, 19, 1)$	$(19, 0, 1)$	$(1, 19, 0)$
$(0, 20, 0)$	$(20, 0, 0)$	$(0, 20, 0)$

Ou seja, 63 soluções com zeros. Porém, há três soluções que estão sendo contadas em duplicidade.
Elas são as soluções $(0, 0, 20)$, $(0, 20, 0)$ e $(20, 0, 0)$.

Por fim, temos então que descartar $3 \cdot 21 - 3 = 60$ soluções.
Isso quer dizer que o número de soluções é:

$$\frac{22!}{2! \cdot 20!} - 60 = \boxed{171}$$

Problema 6

A afirmação é falsa. Por exemplo, se $x = 1000$ e $y = -z$, há infinitas soluções para a equação.

Agora, se fossem considerados os casos apenas em que x, y e z são positivos, é possível ver que:

Vamos analisar primeiramente a equação

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1000}$$

e vamos supor que $x \leq y$. Sendo assim, $1 \leq x \leq 2000$. Se assim não fosse, teríamos que

$$y \geq x > 2000 \quad \text{e} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{1000}.$$

Certamente os casos em que $x > y$ são semelhantes e também fazem um número finito de soluções para a equação.

Portanto, as soluções são da forma $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, tal que $1 \leq x \leq 2000$ e $1 \leq y \leq 2000$. Ou seja, as soluções são ~~no máximo~~ $2000 \cdot 2000 = 4 \cdot 10^6$; portanto finitas.

Note que esse procedimento pode ser generalizado para todo $a \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a$$ terá uma quantidade finita de soluções.

Agora ao problema original:

Semelhantemente ao que foi descrito acima, podemos supor que $x \leq y \leq z$ (os outros casos são semelhantes a esse e, se esse for finito, todos serão).

É possível ver que $1 \leq x \leq 3000$. Se assim não fosse, então $y, z \geq x > 3000$ e

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{1000}$$

Ou seja há finitos valores possíveis para x. Sejam $x_1, x_2, \dots x_n$ esses valores.

Seja $a = \frac{1}{1000} - \frac{1}{x_i}$.

Para cada um desses x_i, podemos ver que há um número finito de soluções para, como visto acima,

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x_i} = \frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1000} - \frac{1}{x_i} = a$$

Como há uma quantidade finita para os x_i, a quantidade de triplas ordenadas (x, y, z) que satisfazem a equação são também finitas.