Lema 2: Para $K \in \mathbb{N}^*$

$\varphi(K)$ é ímpar $\Leftrightarrow$ K é quadrado perfeito.

demonstração:

Suponhamos que K é quadrado perfeito, então $K = m^2$ p/ algum $m \in \mathbb{N}^*$.

Se $m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$ é a decomposição de m em fatores primos, terei que $K = p_1^{2\beta_1} \cdot p_2^{2\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{2\beta_n}$

$\therefore$ o número de divisores de K é:

$\varphi(K) = (2\beta_1+1)(2\beta_2+1)\ldots(2\beta_n+1)$

e, como o produto de números ímpares é ímpar, tenho que $\varphi(K)$ é ímpar //

Por outro lado, se $\varphi(K)$ é ímpar e $K = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}$, então $\varphi(K) = (\alpha_1+1)\ldots(\alpha_n+1)$ com todos os α_i's pares, ou seja, $\alpha_i = 2\beta_i$

e se $\alpha_i = 2\beta_i$ p/ algum $i = 1, 2, \ldots, n$ e se tenho que $m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n}$ teremos que:

$m^2 = p_1^{2\beta_1} \ldots p_n^{2\beta_n} = K \Rightarrow m^2 = K$ //

Conclusão: juntando o Lema 2 e o fato de que o armário de nº K ficará aberto se $\varphi(K)$ for ímpar e fechado se $\varphi(K)$ for par, os armários que ficarão abertos serão os de nº n, com n um quadrado perfeito //