fatores primos então:

$$\varphi(K) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$$

provando este lema: um número d divide n se e somente se na decomposição de d em fatores primos,

$$d = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdots q_m^{\beta_m},$$

e cada um dos q_i é algum dos p_j que aparece na fatoração de n e $\beta_i \leq \alpha_j$.

Ou seja: $d = p_1^{\beta_1} \cdots p_n^{\beta_n}$

$\therefore$ p/ cada $i = 1, \ldots, n$ que β_i pode ser qualquer valor do conjunto $\{0, 1, \ldots, \alpha_i\}$.

$\therefore$ para β_1 temos (α_1+1) valores possíveis. Escolhido β_1, temos (α_2+1) valores possíveis para β_2 e assim por diante até ter (α_n+1) valores possíveis para β_n.

Conclusão: o nº total de escolhas para os β_i's é $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$ e $\varphi(K) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$.

agora,

p/ cada $K \in \mathbb{N}$, $K = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$, tenho que:
$\varphi(K) = (\alpha_1+1)\cdots(\alpha_n+1)$

E pensando no seguinte lema 2: