6. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1000}$ e $x, y, z \in \mathbb{N}$

Vamos supor $x \leq y \leq z$, já que os outros casos serão permutações deste.

Sabemos que $x \leq 3000$, já que para $x = y = z = 3000$ nos leva em $\frac{1}{3000}+\frac{1}{3000}+\frac{1}{3000} \leq \frac{1}{1000}$

Assim: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1000}-\frac{1}{x}$

Agora vamos analisar o caso:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{1000}$$

Também vamos supor $a \leq b$ e sabemos que $a \leq 2000$, já que $\frac{1}{2000}+\frac{1}{2000}=\frac{1}{1000}$ $1 \leq a \leq 2000$

Desta forma percebemos que para cada $a \in \mathbb{N}$ escolhido teremos um $b \in$ fixo. Portanto, para o problema $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{10\ldots}$ teremos um número de soluções finito.

Voltando para $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1000}-\frac{1}{x}=\frac{1}{a}$, pel[o] exemplo anterior, sabemos que o núme[ro] de soluções de $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$ é finito.

Sendo assim, como o número de so[lu]ções para $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1000}-\frac{1}{x}$ é finito, entã[o] para o caso $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1000}$ também se[rá] finito