/ /

Rubens Lima Araújo nº USP 9298997.

1.) Mostre que, se $a \geq -1$ é um número real n é um número natural, então vale a desigualdade: $(1+r)^n \geq 1 + nr$.

1º Base, $P(0) \to (1+a)^0 \geq 1 + 0.a$

$P(0) \to (1) \geq 1$ ✓

$P(1) \to (1+a)^1 \geq 1 + 1.a$

$P(1) \to 1+a \geq 1+a \to 1 \geq 1$ ✓

2º Hipotese de Indução. (HI)

Sendo $P(K) \to (1+r)^K \geq 1 + Kr$ verdade logo

$P(1) \to 1+a \geq 1+a \to 1 \geq 1$ ✓

2º Hipótese de Indução. (HI)

Sendo $P(k) \to (1+r)^k \geq 1+kr$ verdade logo $P(k+1)$ também é verdadeiro.

$$(1+a)^k \geq 1+ka.$$

3º Prova: $n = k+1$:

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1).a$$

$$(1+a)^1 \underbrace{(1+a)^k}_{HI} \geq 1+ak+a$$

$$(1+a)(1+ka) \geq 1+ak+a$$

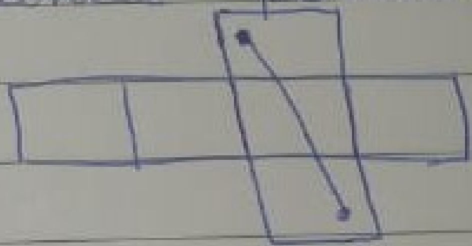
$$1+ak+a+a^2k \geq 1+ak+a \iff$$

$\hookrightarrow a^2k \geq 0$, logo é válido, pois a^2k é sempre maior ou igual a zero.

Rubens Lima Araujo nº USP 9298997

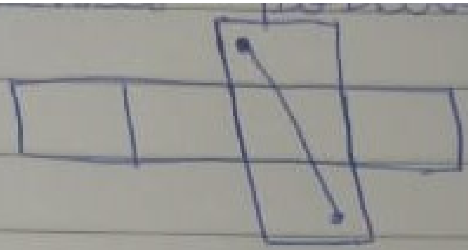
4-) Uma aranha vivia na superfície de um cubo. Estando um dia sobre uma das faces, percebeu que na face oposta pousava uma mosca, conforme a figura.
Qual deve ser o trajeto da aranha, de modo a atingir a mosca, percorrendo a menor distância possível?

R: 1º caso



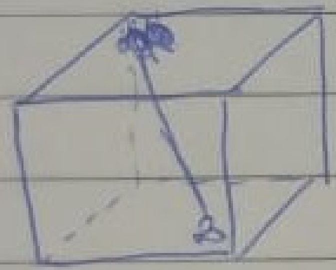
Precisamos pensar na planificação do cubo para enxergar a reta, que seria a menor distância entre dois pontos na geometria euclidiana. Logo o trajeto da aranha foi desenhado acima, e é o menor trajeto que ela não ~~q~~ pode passar

R: 1º caso



Precisamos pensar na planificação do cubo para enxergar a reta, que seria a menor distância entre dois pontos na geometria euclidiana. Logo o trajeto da aranha foi desenhado acima, e é o menor trajeto considerando que ela não ~~q~~ pode passar por dentro do cubo.

2º caso, passando por dentro do Cubo.



Se puder passar por dentro do cubo, a aranha pode apenas ~~a~~ fazer a menor distância entre 2 pontos em 3 dimensões, que também é uma reta.

Rubens Lima Araújo nº USP. 9298997.

5-) Quantas são as soluções inteiras positivas da equação: $x + y + z = 20$.

R: Sejam $x = x' + 1$, $y = y' + 1$, $z = z' + 1$ onde x', y', z' são valores inteiros que podem ser maiores ou iguais a 0. (zero)

logo
$$x + y + z = 20$$
$$x' + 1 + y' + 1 + z' + 1 = 20$$
$$x' + y' + z' = 17.$$

tem a função de separar as

$x' + y' + z' = 17.$

Cada sinal de "+" tem a função de separar as quantidades relativas para x', y', z'.

Todas as soluções são anagramas da "palavra" que tem 19 letras, sendo 17 do tipo "•" e 2 do tipo "+" (conforme visto em aula)

• • • • • • • • • • • • • • • • • + +

Logo temos $\frac{19!}{17!\,2!} = \frac{19 \cdot \cancel{18}^{9} \cdot \cancel{17!}}{\cancel{17!} \cdot \cancel{2!}} = 19 \cdot 9$

$= 171$

Temos 171 soluções inteiras positivas.

26/06/20

Rubens Lima Araújo nºUSP: 9298997

assinatura: Rubens L. Araújo

6-) Mostre que só existe um número finito de soluções inteiras para a equação: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1000}$

R: 1º soluções inteiras positivas

2º com apenas duas incógnitas: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1000}$

3º casos $x \leq y$, se estes casos forem finitos, logo os outros também serão.

4º se (x,y) é uma solução então é necessário que, $x \leq 2000$, pois, caso contrário $y \geq x > 2000$ e

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{2000} + \frac{1}{2000} \leq \frac{1}{1000}$$

$x \quad y \quad z \quad 1000$

R: 1º soluções inteiras positivas

2º com apenas duas incognitas: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1000}$

3º casos $x \leq y$, se estes casos forem finitos, logo os outros também serão.

4º se (x,y) é uma solução então é necessário que, $x \leq 2000$, pois, caso contrário $y \geq x > 2000$ e

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{2000} + \frac{1}{2000} \leq \frac{1}{1000}$$

5º Portanto x e y estão entre 1 e 2000.

Logo para duas variáveis temos:

Logo $S = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 2000,\ 1 \leq y \leq 2000\}$

e esse conjunto é FINITO.

$\longrightarrow$ continuação.

Rubens Lima Araújo   nº USP 9298997

6-) Continuação.

Agora pensaremos no caso de 3 variáveis.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1000}$$

1º vamos supor que $x \leq y \leq z$.

2º x precisa ser $x \leq 3000$, pois caso contrário ~~y, z que são maiores que x que é~~ $y, z \geq x > 3000$ teríamos

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z} < \frac{1}{3000}+\frac{1}{3000}+\frac{1}{3000} \leq \frac{1}{1000}$$

3º Sendo agora $x_1, x_2, \dots, x_n$, para todos os valores de x para quais existam soluções do

2º x precisa ser $x \leq 3000$, pois caso contrário
~~y, z que são maiores que x que é maior~~
$y, z \geq x > 3000$ teríamos

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{3000} + \frac{1}{3000} + \frac{1}{3000} \leq \frac{1}{1000}$$

3º Sendo agora $x_1, x_2, \dots, x_n$, para todos os valores de x para quais existam soluções do problema. Para cada x_i temos,

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = u = \frac{1}{1000} - \frac{1}{x_i}$$

Conforme visto no caso de duas variaveis, o conjunto solução deste caso é finito também para (y, z), já que o número de valores para x_i é finito,
Portanto o número de soluções para 3 variaveis tambem é finito.