Problema 1 $r \geq -1$ então vale $(1+r)^n \geq 1 + nr$ (2,0)

base $n = 1$

$(1+r)^n \geq 1 + nr \rightarrow (1+r)^1 \geq 1 + r$

$1 + r = 1 + r$ vale ✓

Passo da Indução: $n = k$

Para $n = k$ vale p/hip. então $(1+r)^k \geq 1 + rk$ ✓

Vamos mostrar que para $S(k) = k+1$ também vale

$(1+r)^{k+1} \geq 1 + r(k+1) \rightarrow (1+r)\underbrace{(1+r)^k}_{\text{passo}} \geq 1 + rk + r$

$(1+r)(1+rk) \geq 1 + ak + a \rightarrow kr^2 \geq 0$ ✓ vale

$\therefore$ vale p/ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Problema 5 $x+y+z=20$

(2,5)

As soluções inteiras podem ser obtidas a partir da somatória das possibilidades geradas por anagramas.

Tomando casos mais simples:

- $x+y+z=1$

Anagramas: $(1,0,0) = P(3,2) = \frac{3!}{2!} = 3$, possib. $= 3$

- $x+y+z=2$

Anagramas: $(2,0,0) = P(3,2) = 3$ possib. $= 6$

$(1,1,0) = P(3,2) = 3$

- $x+y+z=3$

Anagramas: $(3,0,0) = P(3,2) = 3$ possib. $= 10$

$(2,1,0) = P(3) = 6$

$(1,1,1) = 1$

- $x+y+z=20$ *Fazendo os anagramas e somando-os chegamos em 171 casos

Anagramas:

~~(20,0,0) = 3~~
~~(19,1,0) = 6~~
~~(18,2,0) = 6~~
(18,1,1) = 3
~~(17,3,0) = 6~~
(17,2,1) = 6
~~(16,4,0) = 6~~
(16,3,1) = 6
(16,2,2) = 3
~~(15,5,0) = 8~~
(15,4,1) = 6
(15,3,2) = 6
~~(14,6,0) = 6~~
(14,5,1) = 6
(14,4,2) = 6
(14,3,3) = 3
(13,6,1) = 6
(13,5,2) = 6
(13,4,3) = 6
(12,7,1) = 6
(12,6,2) = 6
(12,5,3) = 6
(12,4,4) = 3
(11,8,1) = 6
(11,7,2) = 6
(11,6,3) = 6
(11,5,4) = 6
(10,9,1) = 6
(10,8,2) = 6
(10,7,3) = 6
(10,6,4) = 6
(10,5,5) = 3
(9,9,2) = 3
(9,8,3) = 6
(9,7,4) = 6
(9,6,5) = 6
(8,8,4) = 3
(8,7,5) = 6
(7,7,6) = 3
(6,6,8) = 3

= 171

* tiramos os que tem zero

Problema 6: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1000}$

?

Consideramos um problema mais simples, com duas incógnitas

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1000}$, considerando que $x \leq y$ se para esse as soluções forem finitas, então para todos os outros casos também serão

Sabemos que $x \leq 2000$, pois caso $x > 2000$ não teria solução com $x \leq y$.

Então x pertencerá ao intervalo entre 1 e 2000 e y também. Logo o conjunto solução está contido

$\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 2000, 1 \leq y \leq 2000\}$ que é finito

Trocando $\frac{1}{1000}$ por q.q. valor $a > 0 \in \mathbb{Q}$, pelo argumento anterior $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a$ tem soluções finitas

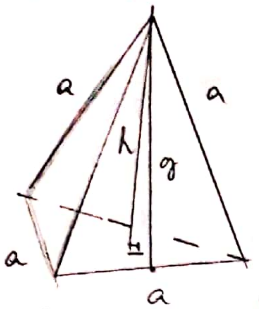
Voltando para o problema original $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1000}$, vamos supor que $x < y < z$. $x \leq 3000$, pois se não $y, z \geq x > 3000$ e

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} < \frac{1}{3000}+\frac{1}{3000}+\frac{1}{3000} < \frac{1}{1000}$

Tome agora $x_1, x_2, \ldots, x_n$ todos os valores de x para os quais existem soluções do Problema. Para cada um dos x_i teremos $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a=\frac{1}{1000}-\frac{1}{x_i}$

Como argumentado, o número de soluções (y,z) para este problema é finito. Dado que o número de valores possíveis para x_i é finito, o número total de triplas solução também será.

Informações Iniciais



(Tetraedro Regular)

Área $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Volume: $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$g = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$E_1 \to r_1$; $E_2 \to r_2$, $E_3 \to r_3$

E_1 - tangência todas as faces

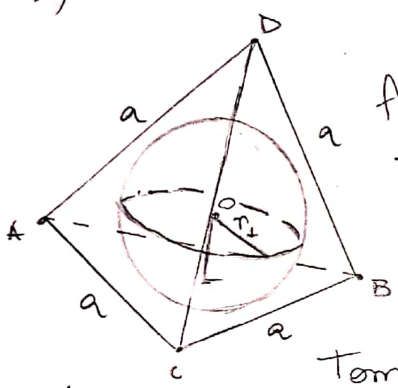
E_2 - tangência todas as arestas

E_3 - tangência todos os vértices

* Mostrar que (r_1, r_2, r_3) é uma PG.

As esferas são concêntricas.

E_1)



O - centro de E_1, a distância entre O e qq. uma das faces do tetraedro é r_1 - raio de E_1

- como temos uma relação de distância de ponto à face, isso nos dá uma dica que temos usar altura p/ expressar r_1 em função do tetraedro

Tome O como vértice do tetraedro ABCO então a distância de O à face ABC é a altura do novo tetraedro. Calculando seu volume temos:

$$V_{ABCO} = \frac{1}{3} \cdot \text{Área base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{3}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) \cdot r_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot r_1$$

Conseguimos fazer o mesmo p/ os tetraedros (BCDO), (ACDO), (ABDO)

Então: $V_{Total} = \cancel{4}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{\cancel{12}\,3} \cdot r_1\right) \to \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3} \cdot r_1$

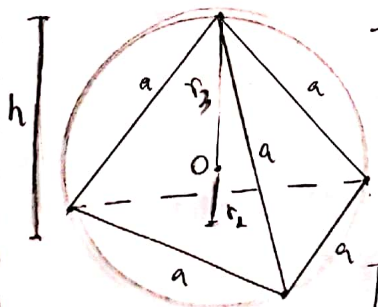
$$r_1 = \frac{a^{\cancel{3}}\sqrt{2}}{\cancel{12}\,4} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{a^2}\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

$$\boxed{r_1 = \frac{a\sqrt{6}}{12}}$$

E_3)

De E_1 temos o seguinte $V_T = 4V_t \to$

$\cancel{\frac{1}{3}\text{Área}}\text{ base} \cdot h = 4\left(\cancel{\frac{1}{3}\text{Área base}} \cdot r_1\right) \to h = 4r_1 \to r_1 = \frac{h}{4}$



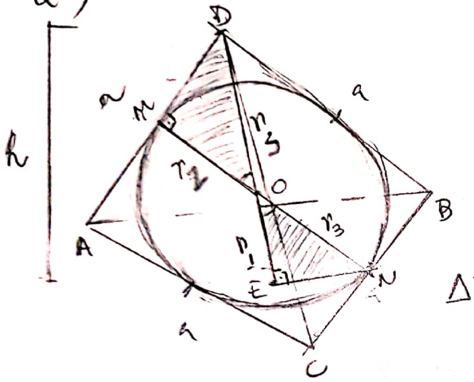
Então $r_1 + r_3 = h \to \frac{h}{4} + r_3 = h \to$

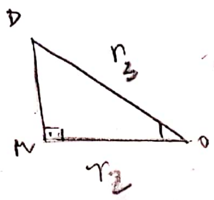
$$\frac{a\sqrt{6}}{12} + r_3 = \frac{a\sqrt{6}}{3} \to r_3 = \frac{(4)a\sqrt{6}}{(4)3} - \frac{a\sqrt{6}}{12} \to r_3 = \frac{3a\sqrt{6}}{12}$$

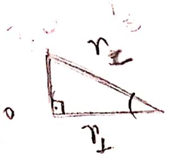
$$\boxed{r_3 = \frac{a\sqrt{6}}{4}}$$

Digitalizado com CamScanner

E2)







$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad 2\sqrt{2} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \end{array} \quad 2\sqrt{3}$$

$$\Delta DOM \cong \Delta EON \longrightarrow \frac{r_2}{r_3} = \frac{r_1}{r_2} \longrightarrow r_2^2 = r_1 \cdot r_3$$

$$\Rightarrow r_2 = \sqrt{r_1 \cdot r_3} \longrightarrow r_2 = \sqrt{\frac{a\sqrt{6}}{12} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 \cancel{6}}{\cancel{48}}} =$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{8}} = \frac{a}{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{a\, 2\sqrt{2}}{\cancel{8}} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \quad // \quad r_3 = \frac{a\sqrt{2}}{4} \, //$$

$$\therefore (r_1, r_2, r_3) \longrightarrow \left(\frac{a\sqrt{6}}{12}, \frac{a\sqrt{2}}{4}, \frac{a\sqrt{6}}{4} \right)$$ R - razão da PG

$$R = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{6}}{12}} = \frac{\cancel{a}\sqrt{2}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{a}\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{12}}{6} = \frac{\cancel{3 \cdot 2}\sqrt{3}}{\cancel{6}} = \sqrt{3} = R$$

$$r_2 \cdot \sqrt{3} = r_3 \longrightarrow \frac{a\sqrt{2}}{4}\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{4} \longrightarrow \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{4} \, //$$

$\therefore (r_1, r_2, r_3)$ formam uma PG de razão $\sqrt{3}$. //