Aluno: Pedro Minoru Saito      Nº USP: 6909859

Prova MAT0450

Problema 1:

Provemos que se $r \geq -1$ é um real e $n$ é um número natural, então vale: $(1+r)^n \geq 1+nr$.

Prova por indução:

Caso inicial $n=1$. Temos

$(1+r)^1 = 1+r$.

E mais: $1+1\cdot r = 1+r$.

Portanto, para $n=1$ o resultado é válido.

Hipótese de indução: Assuma que para $n=k$ vale

$(1+r)^k \geq 1+kr$.

Tese: Provemos que vale para $n=k+1$.

Temos:

$$(1+r)^{k+1} = (1+r)^k\cdot(1+r) \geq (1+kr)(1+r) =$$
$$1+r+kr+\underbrace{kr^2}_{\geq 0} \geq 1+r+kr = 1+(k+1)r.$$

A última desigualdade se verifica pois $r \geq -1$, ~~k~~ é natural.

A primeira desigualdade se aplica pela Hipótese de Indução.

E o resultado está provado.

Problema 3:

Consideremos um tetraedro regular de aresta $l$.

Raio da esfera circunscrita ao tetraedro: $r_3$

$$r_3 = \frac{\sqrt{6}}{4} l.$$

Raio da esfera que tangencia as arestas: $r_2$

$$r_2 = \frac{l\sqrt{2}}{4}$$

Raio da esfera inscrita: $r_1$

$$r_1 = \frac{l\sqrt{6}}{12}$$

Logo: $\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{\frac{l\sqrt{2}}{4}}{\frac{l\sqrt{6}}{12}} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow r_2 = r_1\sqrt{3}.$

$\dfrac{r_3}{r_2} = \dfrac{\frac{l\sqrt{6}}{4}}{\frac{l\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{3} \Rightarrow r_3 = r_2 \cdot \sqrt{3} = r_1\sqrt{3}\sqrt{3} = r_1\sqrt{3}^2.$

Logo, os raios formam uma progressão geométrica de razão $\sqrt{3}$.

## Problema 5

Vamos encontrar o nº de soluções inteiras positivas da equação $x + y + z = 20$.

Sejam $r$, $s$ e $t$ tais que:

$r = x - 1 \Rightarrow x = r+1$

$s = y - 1 \Rightarrow y = s+1$

$t = z - 1 \qquad z = t+1$

Para que encontremos um problema equivalente incluind
os zeros nas soluções.

Temos $(r+1) + (s+1) + (t+1) = 20$

$r + s + t = 17$.

Basta encontrar o número de soluções inteiras não negativas
esta última equação.

Faremos uma Combinação completa "misturando" o valor 17
com as operações de + que são 2, e faremos essa combinação
com a quantidade de "+s"

Assim: $C_{17+2,\,2} = C_{19,\,2} = \binom{19}{2} = \frac{19 \times 18 \times 17!}{2!\; 17!} = 171$.

resultado que assumimos como entendido em "sala de aula" e sem porquê.

Logo, temos 171 soluções inteiras positivas da equação $x+y+z = 20$.

Problema 6: Mostremos que só existe um número finito de soluções inteiras positivas para a equação:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1000}$$

Primeiramente consideremos um problema com apenas 2 variáveis

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1000}$$

Fixemos $x \leq y$ (se o nº de soluções é finito aqui, para $x > y$ também o é).

Se $(x,y)$ é solução, então $x \leq 2000$, pois caso contrário $y \geq x > 2000$ e

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{1}{2000}+\frac{1}{2000}\leq\frac{1}{1000}.$$

Mas $x$ é um número natural entre 1 e 2000 e $y$ também.

Logo, o conjunto de pares de soluções está no conjunto

$\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : 1\leq x\leq 2000,\ 1\leq y\leq 2000\}$, que é finito.

Podemos fixar $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a$ e voltar ao problema original

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1000}.$$

De forma análoga acima, podemos supor $x \leq y \leq z$, já que nos demais casos o resultado é semelhante.

Temos $x \leq 3000$, pois se não $y,z \geq x > 3000$ e

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{3000}+\frac{1}{3000}+\frac{1}{3000}\leq\frac{1}{1000}$$

Tome $x_1, x_2, \dots x_n$ valores de $x$ tais que existam soluções

Para cada $x_i$ $i=1\dots n$, temos

$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a=\frac{1}{1000}-\frac{1}{x_i}$ e como vimos acima este problema temos um nº finito de soluções e portanto temos um nº de triplas $(x,y,z)$ que satisfaçam o problema ■