Monique Gonçalves de Lima Cruz 9865130

P1 - MAT 450 26/06/20

① Mostre que, se $a \geq -1$ é um número real n é um número natural, então vale a desigualdade
$(1+r)^n \geq 1+nr$

$r \geq -1 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

① Base:
$P(1) \rightarrow (1+r)^1 \geq 1+1 \cdot r$
$\rightarrow 1 \geq 1$ ✓

② hip. indutiva
Seja $P(k)$ verdadeiro, $\forall k \in \mathbb{N}$, então $P(k+1)$ também verdadeiro

$(1+r)^k \geq 1+kr$

③ Tese
$n = k+1$,

$(1+r)^{k+1} \geq 1+(k+1) \cdot r$
$\underbrace{(1+r)^k}_{\boxed{HI}}(1+r) \geq 1+rk+r$

$\Rightarrow (1+kr)(1+r) \geq 1+rk+r$
$1+kr+r+kr^2 \geq 1+rk+r$ $\rightarrow \boxed{kr^2 \geq 0}$

$\therefore$ É verdadeiro
pois $kr^2 \geq 0$ sempre

② Problema dos armários (100)

Analisando uma sequencia mais curta, que sejam apenas 20. Para que o armario esteja aberto o número de divisores tem que ser ímpar, ou seja, abre-fecha-abre $(2K+1)$

armário 1 = d(1) = 1 divisor (aberto)
" 2 = d(2) = 2 divisores (fechado)
" 3 = d(3) = 2 " (fechado)
" 4 = d(4) = 3 " (aberto)
" 5 = d(5) = 2 " (fechado)
" 6 = d(6) = 4 " (fechado)
" 7 = d(7) = 2 " (fechado)
" 8 = d(8) = 4 " (fechado)
" 9 = d(9) = 3 " (aberto)
" 10 = d(10) = 4 " (fechado)
⋮
" 16 = d(16) = 5 divisores (aberto)
⋮
" 20 = d(20) = 6 " (fechado)

Resumindo:
Com divisores pare:
2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, ... 20
Com divisores impar:
1, 4, 9, 16

Nota-se um padrão, os armários que estão abertos são todos quadrados perfeitos. Esse é um resultado conhecido que vem do Teorema Fundamental da aritmética

Teorema Fundamental da Aritmética
Todo número natural $n \in \mathbb{N}^*$ se escreve, de forma unica a menos de permutações dos fatores, como
$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$$
onde cada p_i é um nº primo e $\alpha \geq 0$

Portanto, ficarão abertos os armários que forem mexidos um número ímpar de vezes ~~de vezes~~, isto quer dizer todos os armários cujos números tiverem um número ímpar de divisores. O número de divisores de um número N é dado por:

$$q = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$$

sendo $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ os expoentes de seus fatores primos. Para que seja ímpar é preciso que esses expoentes sejam todos pares o que significa que o número N deve ser quadrado perfeito. Portanto, ficarão abertos os armários de números:

$$1 \leq x^2 \leq 100$$

números do tipo $n^2, n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow$ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100

⑤ Quantas ~~são~~ as soluções inteiras positivas da equação: $x+y+z=20$?

Preciso contar quantas são as soluções da equação $x+y+z=20$, porém, não a quantidade de soluções inteiras e não negativas, e sim, soluções inteiras e positivas

Assim, vou resolver da seguinte forma

Sejam, $\begin{cases} x = x'+1 \\ y = y'+1 \\ z = z'+1 \end{cases}$ Onde x', y' e z' são números inteiros que podem assumir valores positivos e também o valor zero.

Isso me garante que x, y, z terão valores positivos

$$x+y+z=20$$
$$x'+1+y'+1+z'+1=20$$
$$x'+y'+z'=17$$

Cada sinal "+" tem a função de separar as quantidades relativas para x', y' e z'. Todas as soluções são anagramas da "palavra"

.................++, uma "palavra" de 19 letras, sendo 17 do tipo "." e 2 do tipo "+"

Que é igual a:

$$\frac{19!}{17!\,2!} = \frac{19 \cdot 18 \cdot \cancel{17!}}{\cancel{17!} \cdot 2 \cdot 1} = 19 \cdot 9 = 171$$

∴ 171 soluções inteiras positivas

⑥ $1/x + 1/y + 1/z = 1/1000$. Mostrar existência de um número finito de soluções inteiras POSITIVAS.

De inicio irei considerar um problema mais simplificado, com 2 incognitas

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1.000}$$

Considerarei apenas os casos onde $\boxed{x \le y}$

Inicialmente observo que, se o par (x,y) é uma solução então, $x \le 2000$, pois

caso contrário, $y \ge x > 2000$ e

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{2000} + \frac{1}{2000} \le \frac{1}{1000}$$

x e y serão numeros naturais entre 1 e 2000

Conjunto dos pares da solução:

$\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \le x \le 1000, 1 \le y \le 2000\}$, claramente finito

Observe que para trocar $1/1000$ por qualquer valor real positivo e o argumento seria o mesmo, ou seja, para todo $a > 0$, só existe um número finito de soluções inteiras positivas para a equação

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a.$$

Voltando ao problema original,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1000}$$

Supondo $x \le y \le z$, os outros casos são semelhantes.

tilibra

Devo ter,

$x \leq 3000$, senão

$y, z \geq x > 3000$ e

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} < \frac{1}{3000}+\frac{1}{3000}+\frac{1}{3000} \leq \frac{1}{1000}$$

Sejam agora $x_1, x_2, \ldots, x_n$, todos os valores de x para os quais existam soluções do problema.
Para cada um dos x_i, terei:

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = a = \frac{1}{1000} - \frac{1}{x_i}$$

Como visto, o número de soluções (y, z) para este problema é finito. Já que o número de valores possíveis para x_i é finito, o número total de triplas soluções possíveis é também finito.

tilibra