1) $a \geq -1 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ $\qquad (1+r)^n \geq 1 + n.r$

$n=1$ $P(1) \Rightarrow (1+a)^1 \geq 1 + 1.a \rightarrow 1 \geq 1$ verdadeiro

Hipótese indutiva

seja $P(K)$ verdadeiro, então vamos provar p/ $P(K+1)$

$$\boxed{(1+a)^K \geq 1+Ka}$$

Para $n = K+1$

$$(1+a)^{K+1} \geq 1 + (K+1)a$$

$$\underbrace{(1+a)^K}_{\text{Por hipótese}}(1+a) \geq 1 + aK + a$$

$$(1+Ka)(1+a) \geq 1 + aK + a$$

$$1 + Ka + a + Ka^2 \geq 1 + aK + a \rightsquigarrow Ka^2 \geq 0$$

Sendo assim, é verdade, pois Ka^2 sempre será maior ou igual a zero

2) 1 a 100

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1p	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2p		F		F		F		F	
3p			F			A			F
4p				A				A	
5p					F				
6p						F			
7p							F		
								F	
									A

Percebemos que os armários que ficarão abertos são quadrado perfeito

Bom, para saber a quantidade de divisores usaremos Teorema Fundamental da Aritmética.

Todo $n \in \mathbb{N}$, pode ser escrito da forma $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ + q α é primo

queremos mostrar n de divisores

$a = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$

$n = 48, \ n = 16 \times 3 = 2^{4} \times 3^{1}$

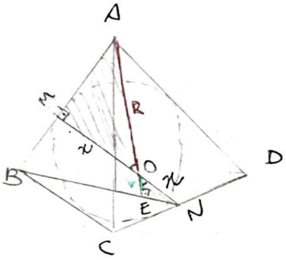
$d(48) = (4+1) \cdot (1+1) = 5 \cdot 2 = 10$

$n = 100, \ n = 2^2 \cdot 5^2 = (2 \cdot 5)^2$

$d(100) = (2+1)(2+1) = 9 \rightarrow$ Aberto

Logo, o quadrado perfeito é aberto.

3)



Para saber que r_1, r_2 e r_3 estão na progressão geométrica

Colocamos o ponto M - ponto médio de $\overline{AB}$ e N - o ponto médio de $\overline{CD}$.

Traçamos uma $\overline{BN}$ e $\overline{NM}$, e depois traçamos uma reta do ponto até a reta BN, marcando o ponto E. e O é o ponto médio de $\overline{MN}$.

Assim podemos ver o ΔAMO e ΔOEN.

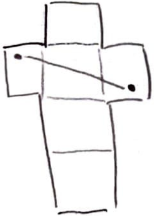
Podemos usar semelhança de triângulo pelo caso ALA.

$\Delta AMO \sim \Delta OEM$

$$\frac{x}{r} = \frac{R}{x}$$

$\boxed{x^2 = Rr}$ ← progressão geométrica.

4)



O menor trajeto da aranha é :

Primeiro planificamos o cubo como a figura ao lado. E trasamos uma reta da aranha para a mosca.

O fato de planificar o sólido, valerá a frase de Euclides: "A menor distância entre dois pontos é uma linha reta".

5) Tenho que contar quantas são as soluções da equação $x+y+z=20$, porém, não a quantidade de soluções inteiras e não negativas, e sim, soluções inteiras e positivas.

Assim: seja a $x = x' + 1$, $y = y' + 1$, $z = z' + 1$

onde x', y', z' são números inteiros que podem assumir valores positivos ou também o valor zero, isso me garante que x, y, z terão um valor positivo

$$x + y + z = 20$$
$$x' + 1 + y' + 1 + z' + 1 = 20$$
$$x' + y' + z' = 17$$

cada sinal "+" tem função de separar as quantidades relativas para x', y' e z'. Todas as soluções são anagramas da palavra "$\underbrace{*************\ldots}_{17}\underbrace{++}_{2}$" ou seja, uma palavra de 19 letras, sendo 17 do tipo "*" e 2 do tipo +

$$\frac{19!}{17!\,2!} = \frac{19 \cdot \overset{9}{\cancel{18}} \cdot \cancel{17!}}{\cancel{17!}\,2!} = \boxed{171}$$

6) Mostre que só existe um nº finito de soluções inteiras p/ a equação

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1000}$$

Inicialmente consideremos o problema com apenas 2 incógnitas (uma das sugestões do Polya)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1000}$$

Vamos considerar apenas os casos de $x \leq y$. Se estes forem um nº finito, os outros também serão.

Inicialmente observemos que, se o par (x,y) é uma solução então necessariamente, $x < 2000$ pois, caso contrário $y \geq x > 2000$ e $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{2000} + \frac{1}{2000} \leq \frac{1}{1000}$

x será um número natural entre 1 e 2000, o mesmo vale para y.

Assim o conjunto dos pares está contido em: $\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 2000, 1 \leq y \leq 2000\}$ que é finito.

Podemos ver que da para trocar $\frac{1}{1000}$ por qualquer valor real positivo, pois para todo $a > 0$, só existe um número finito de soluções inteiras positivas para a equação $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a$

Agora para o problema original. Podemos supor $x \leq y \leq z$, os outros casos são semelhantes.

Devemos ter $x \leq 3000$ pois caso contrário $y, z \geq x > 3000$ e

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{3000} + \frac{1}{3000} + \frac{1}{3000} \leq \frac{1}{1000}$$

sejam agora $x_1, x_2, \ldots, x_n$ todos os valores de x para os quais existem soluções do problema para cada um dos x, teremos

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a = \frac{1}{1000} - \frac{1}{x}$$

Como visto acima, o número de soluções (y,z) para este problema é finito. Já que o número de valores possíveis para x, é finito, o número total de triplas solução possíveis para o problema é também finito