Matheus Mendes dos Santos - 7992233

Problema 1

$r \geq -1 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Queremos demonstrar que $(1+r)^n \geq 1 + nr$

- Se $n=1$, temos que $(1+r)^1 \geq 1 + 1 \cdot r \Rightarrow 1 + r \geq 1 + r \Rightarrow 1 \geq 1$.

A desigualdade é verdadeira para $n=1$.

- Vamos supor que a afirmação é verdadeira para $n=k$ e provar que o resultado também vale para $n=k+1$. (Hipótese de Indução).

Isto é $P(k) \rightarrow P(k+1)$

- Se $(1+r)^k \geq 1 + kr$ então:

$$(1+r)^k \geq 1 + kr \Rightarrow (1+r)(1+r)^k \geq (1+kr)(1+r), \text{ pois } (1+r) \geq$$

$$(1+r)^{k+1} \geq 1 + kr + r + kr^2 \geq \underbrace{1 + kr + r}_{1+(k+1)r}, \text{ pois } kr^2 \geq 0. \text{ Logo}$$

$$(1+r)^{k+1} \geq 1 + (k+1)r.$$

c.q.d.

Problema 2

Vamos pensar no que deve acontecer para um armário ficar aberto.

Como a n-ésima pessoa troca o estado das portas dos armários cujos números são múltiplos de n, os armários que ficarão abertos são aqueles que forem "mexidos" um número ímpar de vezes. Examinemos o armário 100:

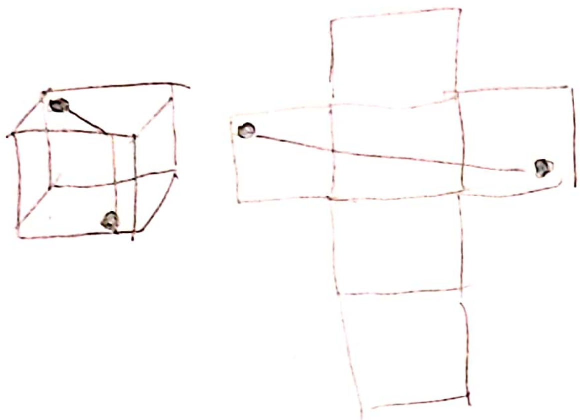
a pessoa 1 abre, o 2 fecha, 3 não faz nada, 4 abre, 5 fecha...

devemos procurar os divisores de 100.

Portanto, os armários que ficarão abertos são aqueles que possuem quantidade ímpar de divisores.

São eles: 1, 4, 9, 25, 36, 49, 64, 81 e 100.

Problema 4



Sabemos que a menor distância entre dois pontos é uma reta. Assim, se planificarmos o cubo como nos desenhos acima, podemos facilmente encontrar o menor caminho possível.

Este argumento é válido pois a planificação do cubo é uma transformação que preserva as distâncias.

Problema 6

Vamos simplificar o problema. Usaremos 2 incógnitas.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1000}.$$

Tome $x \leq y$. Se estes forem em número finito, os outros também serão.

Se o par (x,y) é solução, então $x \leq 2000$. Caso contrário $y \geq x > 2000$ e $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} < \frac{1}{2000}+\frac{1}{2000} \leq \frac{1}{1000}$.

Então sabemos que o conjunto da solução está contido em:

$$\{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : 1 \leq x \leq 2000, \; 1 \leq y \leq 2000\}$$ que é um conjunto finito.

Note que podemos trocar $\frac{1}{1000}$ por qualquer valor real positivo e o argumento seria essencialmente o mesmo. Isto é, existe um número finito de soluções inteiras positivas para a equação $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a$.

Considere agora $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1000}$. Vamos supor sem perda de generalidade que $x \leq y \leq z$. Devemos ter $x \leq 3000$.

Sejam agora $x_1, \ldots, x_n$ todos os valores de x para os quais existem soluções do problema. Para cada x_i, teremos

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a=\frac{1}{1000}-\frac{1}{x_i},$$ que tem nº de soluções finitas.

Como a escolha de cada x_i é finita, o número de triplas também é