Problema 1: Mostre que, se $a \geq -1$ é um nº real n é um nº natural, então vale a desigualdade: $(1+r)^n \geq 1 + nr$

$a \geq -1 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

a) Base:

$P(1) \Rightarrow (1+a)^1 \geq 1 + 1.a \Rightarrow 1 \geq 1$ ✓

b) Hipótese:

Seja $P(k)$ verdadeira, $\forall k \in \mathbb{N}$, então $P(k+1)$ também é:

$\boxed{(1+a)^k \geq 1 + k.a}$ ⤳ hip. de indução

c) Tese:

Para $n = k+1$, teremos:

$(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1).a$

$\underbrace{(1+a)^k}_{H.I.} . (1+a) \geq 1 + ak + a$

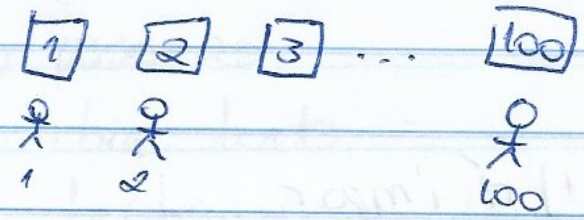
$(1+k.a)(1+a) \geq 1+ak+a$

$\cancel{1}+\cancel{ka}+\cancel{a}+ka^2 \geq \cancel{1}+\cancel{ak}+\cancel{a}$

$ka^2 \geq 0$

Sendo assim, é verdade, pois ka^2 sempre será maior ou igual a zero pois $k>0$ e $a^2 \geq 0$.

Problema 2 (Problema dos armários)



<u>Proposição</u>: O armário de número n ficará aberto no final se e somente se n for um quadrado perfeito

Vamos inicialmente definir a função $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$\varphi(n)$ = nº de divisores do número n

<u>Lema</u>: O armário de número n ficará aberto se o número $\varphi(n)$ for ímpar e ficará fechado se o número $\varphi(n)$ for par.
De fato, para cada divisor o armário muda de estado e o estado inicial é fechado

De fato, para cada divisor o armário muda de estado e o estado inicial é fechado

Teorema: (Fundamental da aritmética)
Todo número natural $n \in \mathbb{N}^*$ se escreve, de forma única a menos de permutação dos fatores, como $n = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdots P_n^{\alpha_n}$ onde cada P_i é um nº primo e $\alpha_i \geq 0$

Lema: Se $n \in \mathbb{N}^*$ e $n = P_1^{\alpha_1} \cdots P_n^{\alpha_n}$ é a única decomposição de n em fatores primos então $\varphi(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_n + 1)$

Dem: De fato, um número d divide n, se e somente se na decomposição de d em fatores primos

$d = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdots q_n^{\beta_m}$

cada q_i é algum dos P_j que comparece na fatoração de n e $\beta_i \leq \alpha_j$. Ou seja

$\Leftrightarrow \quad d = P_1^{\beta_1} \cdot P_2^{\beta_2} \cdots P_n^{\beta_n}$

Portanto temos para cada $i = 1, \dots, n$ que β_i pode ser qualquer valor do conjunto $\{0, 1, 2, \dots, \alpha_i\}$

$\therefore$ Para β_1, temos $(\alpha_1 + 1)$ valores possíveis. Escolhido β_1, temos $(\alpha_2 + 1)$ " valores possíveis para β_2, e assim por diante, até $(\alpha_n + 1)$ valores possíveis p/ β_n

$\therefore$ O número total de escolhas para os β_i's é $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1) = \varphi(n)$

Lema 1. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $k = P_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot P_n^{\alpha_n}$
$\varphi(k) = (\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + 1)$

Lema 1. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $k = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$

$\varphi(k) = (\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + 1)$

Lema: Para $k \in \mathbb{N}^*$ $\varphi(k)$ é ímpar $\iff$ k é quadrado perfeito.

Dem: Suponhamos que k é quadrado perfeito, $k = m^2$ para algum $m \in \mathbb{N}^*$. Então se $m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n}$ é a decomposição de m em fatores primos então

$k = p_1^{2\beta_1} \cdot p_2^{2\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{2\beta_n}$

$\therefore$ O nº de divisores de k, pelo lema 1 é

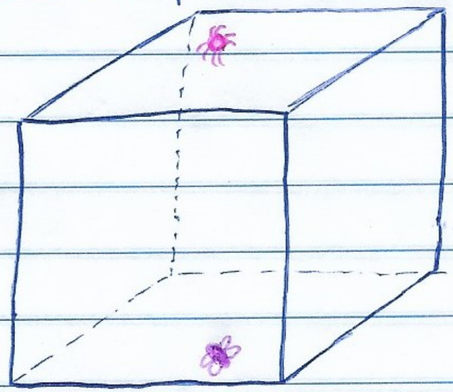
$\varphi(k) = (2\beta_1 + 1)(2\beta_2 + 1) \ldots (2\beta_n + 1)$

$\therefore$ $\varphi(k)$ é ímpar

Por outro lado, se $\varphi(k)$ é ímpar e $k = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}$ então $\varphi(k) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_m + 1)$ com todos o α_i pares, ou seja $\alpha_i = 2\beta_i$, para $i = 1, \ldots n$

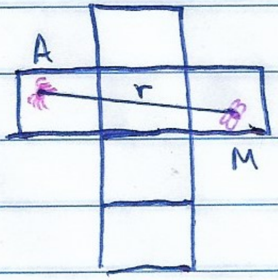
$\therefore$ Se $m = p_1^{\beta_1} \dots p_m^{\beta_m}$ teremos $m^2 = p_1^{2\beta_1} \dots p_m^{2\beta_m} = K$

Problema 4: Uma aranha vivia na superfície do cubo. Estando um dia sobre uma das faces, percebeu que na face oposta estava pousada uma mosca. Qual deve ser o trajeto da aranha, de modo a atingir a mosca, percorrendo a menor distância?



R: Vamos utilizar o princípio básico da geom. euclidiana: "A menor distância entre dois pontos é uma linha reta"

Vamos planificar o sólido para usar o princípio, o que é possível pois é uma transf. linear que preserva distância. Obtendo assim:



A menor distância (r) que é a reta $\overline{AM}$.

Problema 6: Mostre que só existe um nº finito de soluções inteiras positivas para a equação

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1000}$$

Consideremos inicialmente um problema simplificado, com apenas 2 incógnitas:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1000}$$

Vamos considerar apenas os casos nos quais $x \leq y$. Se estes forem nº finito, os outros também serão.

Observamos, inicialmente que, se o par (x, y) é uma solução então, necessariamente, $x \leq 2000$, pois, caso contrário o $y \geq x > 2000$ e $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{1}{2000}+\frac{1}{2000} \leq \frac{1}{1000}$

Mas então, x será um nº natural entre

$y \geq x > 2000$ e $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{2000} + \frac{1}{2000} \leq \frac{1}{1000}$

Mas então, x será um nº natural entre 1 e 2000 e o mesmo vale para y. Assim, o conjunto dos pares solução está contido no conjunto:

$$\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 2000,\ 1 \leq y \leq 2000\}$$

que é finito.

Voltemos ao problema inicial

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1000}$$

Podemos supor $x \leq y \leq z$, os outros casos serão semelhantes. Temos que $x \leq 3000$ pois caso contrário $y, z \geq x > 3000$, e

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{3000} + \frac{1}{3000} + \frac{1}{3000} \leq \frac{1}{1000}$$

26/06/20

Sejam agora $x_1, x_2, \cdots, x_n$, todos os valores de x para os quais existem soluções do problema. Para cada um dos x_i, teremos:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a = \frac{1}{1000} - \frac{1}{x_i}$$

Como visto acima, o nº de soluções (y, z) para este problema é finito. Já que o nº de valores possíveis para x_i é finito, o nº total de triplas soluções possíveis para o problema é também finito.