MAT 450 - 1ª Prova Juliana Ken 3466106 ①

Problema 1

Pelo Princípio da Indução Finita temos:

Uma proposição $P(n)$, aplicável aos números naturais n, é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, quando:

1º) $P(n_0)$ é verdadeira, isto é, a propriedade é válida para $n = n_0$, e

2º) se $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$ e $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ também é verdadeira.

Assim, para o exercício temos:

$P(1)$ é válida pois: $(1+r)^1 \geq 1 + 1r$

Supondo válida para $n = k$:

$$(1+r)^k \geq 1 + rk$$

e provemos que vale para $n = k+1$:

$$(1+r)^{k+1} \geq 1 + (k+1)r$$

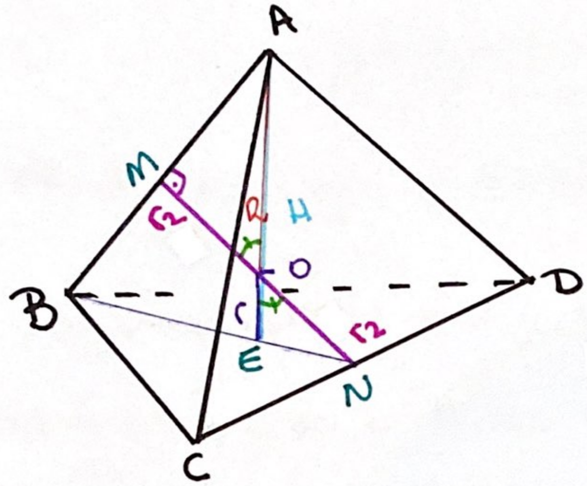
Temos:

$$(1+r)^k \geq (1+kr) \cdot (1+r)$$

$$(1+r)(1+r)^k \geq (1+kr)(1+r)$$

$$\overbrace{\hphantom{(1+r)(1+r)^k}}(1+r)^{k+1} \geq 1+r+kr+kr^2 \geq \overbrace{1+kr+r}^{}_{1+(k+1)r}$$

Problema 3:



r_1: raio da esfera inscrita

R_3: raio da esfera circunscrita

r_2: raio da esfera tangente às arestas.

Temos que os triângulos AMO e NEO são semelhantes, assim:

$$\Delta AMO \sim \Delta NEO$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{R_3}{r_2}$$

$$r_2^2 = r_1 \cdot R_3$$

cqd

Problema 5:

$$x + y + z = 20$$

nº de soluções inteiras positivas?

Substituindo $x = a+1$, $y = b+1$ e $z = c+1$ com

$a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ e $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ temos:

$$a+1+b+1+c+1 = 20$$

$$a+b+c = 17$$

$$| | \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$P_{19}^{17,2} = \frac{19!}{17!\,2!} = \frac{19 \cdot 18 \cdot \cancel{17!}}{\cancel{17!}\,2!} = 171$$

∴ a equação tem 171 soluções

Problema 6:

Como discutido em aula vamos mostrar o número de soluções inteiras positivas

Seguindo as sugestões de Polya vamos primeiro pensar em um problema menor, com somente 2 incognitas:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1000}$$

Podemos supor $\boxed{x \leq y}$ e se existirem um número finito de soluções, os demais casos também terão. Assim:

Obrigatoriamente $x \leq 2000$ pois, caso contrário

$$y \geq x > 2000 \text{ e } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{2000} + \frac{1}{2000} \leq \frac{1}{1000}$$

Desde modo, x e y são números naturais e estão entre 1 e 2000. E, portanto, o par ordenado de soluções (x, y) é finito e está contido: $1 \leq x \leq 2000$ e $1 \leq y \leq 2000$

Usando a soluçõ anterior vamos pensar o problema proposto: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1000}$

Podemos supor $x \leq y \leq z$ e se convir para esse caso vale para os demais.

Necessariamente $x \leqslant 3000$ pois, caso contrario, $y, z \geqslant x > 3000$ e

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{3000}+\frac{1}{3000}+\frac{1}{3000} \leqslant \frac{1}{1000}$$

Considere $x_1, x_2 \dots x_n$, os valores para os quais o problema tem solucaõ. Assim

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1000}-\frac{1}{x_i}$$

x_i: qualquer uma das soluçõ

Como vimos que (y, z) tem finitas soluçõ, existe um número finito de xi e $\therefore$ o problema tem um número finito de solucõ (x, y, z)

Problema 2:

Lema: Se $n \in \mathbb{N}$ e $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ é única decomposição de n em fatores primos, então,

$$\varphi(n) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \ldots (\alpha_n+1)$$ sendo $\varphi(n)$ o número de divisores de n

Proposição: O armário de número n ficará aberto no final se e somente se n for um quadrado perfeito.

Dem: É fácil observar que se φ for um número par os armários estão fechados e se φ for ímpar os armários estão abertos. Assim, como o problema pede quais armarios ficarão abertos temos que φ deve ser ímpar. Para que φ seja um número ímpar deve ser a multiplicação de fatores ímpares:

$$\varphi(n) = \underbrace{(\alpha_1+1)}_{\text{ímpar}}\underbrace{(\alpha_2+1)}_{\text{ímpar}} \ldots \underbrace{(\alpha_n+1)}_{\text{ímpar}}$$

para que α_1+1 seja um número ímpar α_1 deve ser multiplo de 2, podemos escreve-lo como $2m_1$, o mesmo para $\alpha_2 \ldots \alpha_n$

Desde modo, temos que n pode ser escrito

como: $n = p_1^{2m_1} \cdot p_2^{2m_2} \cdots p_n^{2m_n}$ e assim,

$$n = \left(p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdots p_n^{m_n}\right)^2$$ e portanto

n é um quadrado perfeito

e, somente, os armarios com números

quadrados perfeitos ficam abertos.