JOSÉ BARTASEVICIUS NUSP 3095235

MAT 0450 26JUN2020

Feitas as questões 1, 2, 4, 5 e 6

Problema 1: Resolvendo pelo Princípio da Indução Finita

Base da indução:

$(1+(-1))^n \geq 1+n(-1) \Rightarrow 0 \geq 1-n$, $n \in \mathbb{N}^*$ (verdadeiro)

$r \neq -1$, $n=0$: $(1+r)^0 \geq 1+0r \Rightarrow 1 \geq 1$ (verdadeiro)

Passo indutivo:

Por hipótese: $(1+r)^p \geq 1+pr$ para qualquer $r \geq -1$ e $p \in \mathbb{N}$.

Então $n=p+1$:

$(1+r)^{p+1} \geq 1+(p+1)r \Rightarrow$

$\Rightarrow (1+r)^p\,(1+r) \geq 1+pr+r$

$(1+r)^p + r\cdot(1+r)^p \geq 1+pr+r$ (i)

$(1+r)^p \geq 1+pr$ (por hipótese) (ii)

Verificando a desigualdade $r(1+r)^p \geq r$:

a) Se $-1 \leq r < 0$:

$r(1+r)^p \geq r$ ($\times\frac{1}{r}$ inverte desigualdade pois $r>0$)

$(1+r)^p \leq 1$

Neste caso, $0 \leq 1+r < 1 \therefore (1+r)^p \leq 1$ é verdadeiro ✓

b) $r=0$

$0\cdot(1+0)^p \geq 0 \Rightarrow 0 \geq 0 \therefore$ verdadeiro ✓

c) $r>0$

$r(1+r)^p \geq r$ ($\times\frac{1}{r}$ e não inverte desigualdade)

$(1+r)^p \geq 1$

$1+r \geq 1 \Rightarrow (1+r)^p \geq 1 \therefore$ verdadeira ✓

Logo, $r(1+r)^p \geq r$ é VERDADEIRA para $r \geq -1$ e $p \in \mathbb{N}$.

Voltando em (ii):

$(1+r)^p \geq 1+pr$ (por hipótese)

$r(1+r)^p \geq r$ (demonstrado)

Somando as desigualdades

$(1+r)^p + r(1+r)^p \geq 1+pr+r$, resta verdadeira, garantindo que a desigualdade (i) é verdadeira e demonstrando que o passo indutivo é verdadeiro.

Portanto, se a base da indução é verdadeira e o passo indutivo é verdadeiro, então a desigualdade é verdadeira ∎

JOSÉ BARTASEVICIUS NUSP 3095235
S T Q Q S S D MAT 0450 26 JUN 2020

Problema 2: Inicialmente, os armários estão fechados. Deseja-se saber quantos armários ficarão abertos até que a centésima pessoa faça a inversão da situação do armário.
Fixando a observação para um armário específico, mexerão na porta deste armário todas as pessoas cuja posição na ordem seja divisor do número do armário. Isto é, para mexer na porta do armário 6, por exemplo, somente as pessoas de ordem 1, 2, 3 e 6 da fila serão aquelas que podem alterar o estado da porta.
Se a porta está fechada e deseja-se saber as abertas, portanto deverá ter um número ímpar de alterações na porta. Isto implica dizer que o número de divisores de cada porta, que fica aberta ao final do processo, é ímpar.
O Teorema Fundamental da Aritmética diz que todos os números inteiros maiores que 1 podem ser decompostos em produto de números primos de maneira única, a menos da ordem dos fatores.
Após a decomposição sabe-se que o número de divisores de um número é a combinação dos fatores primos que fazem parte da decomposição

deste número, podendo o expoente variar de 0 a e_i, onde e_{p_i} é o expoente do fator primo p_i presente na decomposição

$N = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_i^{e_i} \ldots p_n^{e_n}$

Portanto, cada fator primo pode aparecer até $e_i + 1$ vezes na decomposição de cada divisor.

Logo, o número de divisores de N é

$d(N) = (e_1+1)(e_2+1) \cdots (e_n+1)$

Conforme observado anteriormente, para que o armário fique aberto, é necessário que o número de divisores seja ímpar. Para que $d(N)$ seja ímpar, cada um dos fatores de $d(N)$ deve ser ímpar, implicando $e_1, e_2, \ldots, e_n$ serem pares.

Um número que possui todos os expoentes pares é, necessariamente, um quadrado perfeito.

Portanto, as portas que ficam abertas são aquelas cujo número seja um quadrado perfeito.

Finalmente, os armários que ficam abertos ao final do processo são:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100. ∎

S T Q Q S S D

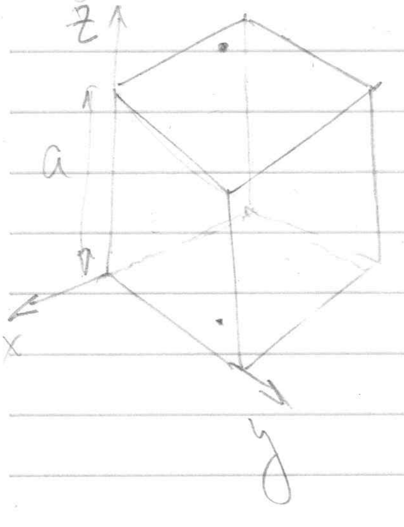
Problema 4.

Este é um problema a ser tratado nas transformação geométrica. Neste caso, será utilizada a rotação.

onde a reta será representada pelas arestas.

Também está sendo trabalhado com geometria Euclidiana, o que implica dizer que as transformações geométricas realizadas são isométricas, isto é, as distâncias entre os pontos são mantidas.

No caso do cubo:



Pode-se fazer a rotação de 90° na aresta $x=0, z=a$, a fim de "alinhar" a face superior do cubo com a face no plano yz.

Após fazer este "alinhamento", faz-se outra rotação de 90° com as duas faces na aresta $x=0, z=0$, a fim de alinhar com a face inferior do plano xy. Com isto, os dois pontos estariam no mesmo plano. A menor distância entre os dois pontos é o segmento de reta entre eles. Com o processo reverso de rotação dos planos, estaria traçada a menor distância entre os dois pontos, garantida pela isometria da rotação.

Note que poderiam ocorrer outras rotações por outras arestas. Portanto, é essencial fazer todas

spiral

as possibilidades de rotações a fim de encontrar o menor segmento, em virtude do caminho por uma face poder ser menor do que pela outra face do cubo. ▨

Problema 5

Soluções inteiras positivas implicam
$x \geq 1$, $y \geq 1$ e $z \geq 1$

Fazendo transformação de variáveis tem-se

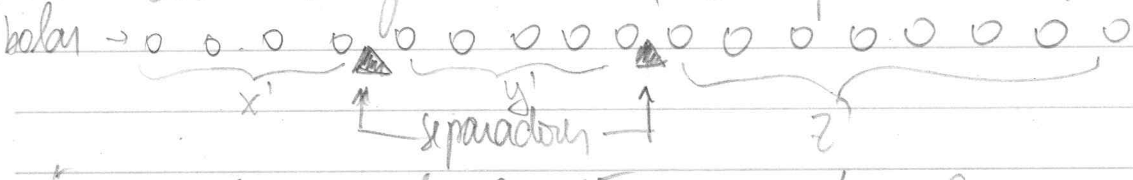
$x = x'+1$, com $x' \in \mathbb{N}$
$y = y'+1$, com $y' \in \mathbb{N}$
$z = z'+1$, com $z' \in \mathbb{N}$

Assim, $x+y+z=20 \Rightarrow (x'+1)+(y'+1)+(z'+1)=20 \Rightarrow$
$\Rightarrow x'+y'+z'=17$

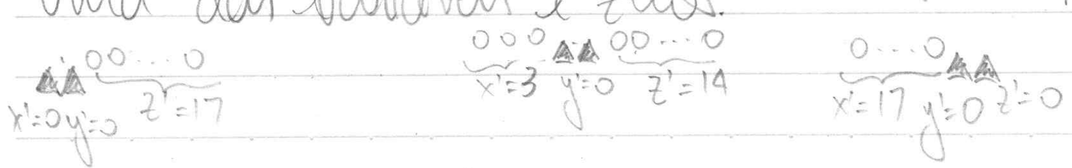
Neste caso, em virtude da transformação linear de variáveis, verifica-se o isomorfismo entre (x,y,z) e (x',y',z') para a solução das equações $x+y+z=20$ e $x'+y'+z'=17$, dada as condições para as variáveis.

Portanto, o número de soluções inteiras não negativas de $x'+y'+z'=17$ é o mesmo número de soluções inteiras positivas de $x+y+z=20$.

Para encontrar o número de soluções de $x'+y'+z'=17$ assume-se que existem 17 bolas e dois separadores, conforme abaixo:



Esses separadores são usados para separar as quantidades de bolas nas quantidades x', y' e z'. Caso dois separadores sejam colocados lado a lado, significa que, pelo menos, uma das variáveis é zero.



E se o separador estiver no início ou fim, significa que $x'=0$ ou $z'=0$:

$x'=0$ $\underbrace{0 \cdots 0}_{y'=15}$ $\underbrace{00}_{z'=2}$ $x'=0$ $\underbrace{00 \cdots 0}_{y'=17}$ $z'=0$ $\underbrace{00}_{x'=2}$ $\underbrace{0 \cdots 0}_{y'=15}$ $z'=0$

Portanto, para encontrar a quantidade de soluções deve-se resolver o número de combinações entre as 17 bolas e os 2 separadores:

$$\# \text{soluções} = \frac{19!}{\underbrace{17!}_{\#\text{permutações de bolas}}\ \underbrace{2!}_{\#\text{permutações de separadores}}} = 171$$

19! → # permutações total

S T Q Q S S D

Problema 6: (Supondo soluções inteiras POSITIVAS)

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1000}$$

Supondo $x=y=z$, tem-se $x=y=z=3000$
Sem perda de generalidade, será estudada a variação de x para valores maiores que 3000.
Se $x>3000$, isto implica $y<3000$ ou $z<3000$.
Se todas as soluções são inteiras positivas, então nenhuma das variáveis pode ser menor que 1000, pois isto implicaria pelo menos uma das demais variáveis ser negativa.
Da mesma forma, se uma das variáveis for igual a 1000, a soma das demais parcelas deve ser zero e, portanto, impossível de todas serem positivas.
Voltando à análise de $x>3000$ verifica-se que uma das variáveis poderá variar somente no intervalo $[1001, 2999]$ com números inteiros.
Portanto, há limitação de soluções em uma das variáveis, mantido $x>3000$.
Similarmente, se $y>3000$, a situação é análoga, porém com outra variável x ou z. Da mesma maneira ocorre com $z>3000$.
Portanto, percebe-se que há uma permutação nas soluções quando um número aumenta e os demais diminuem. Exemplificando, a solução (4000, 4000, 2000) também pode ser (4000, 2000, 4000) e (2000, 4000, 4000)

spiral

Logo, ocorre a permutação de soluções finitas para uma variável. A permutação de soluções finitas também fornece soluções finitas, conforme queria demonstrar. ∎