1

$\vdash (1+x)^n \geq 1+n.x \,, \ \forall x \in \mathbb{R} \,, \ x > -1 \,, \ n \in \mathbb{N}$

DEM.:

i) $n = 1 \Rightarrow (1+x)^n = 1+x$ e $1+n.x = 1+x$

$\Rightarrow (1+x)^n = 1+n.x$

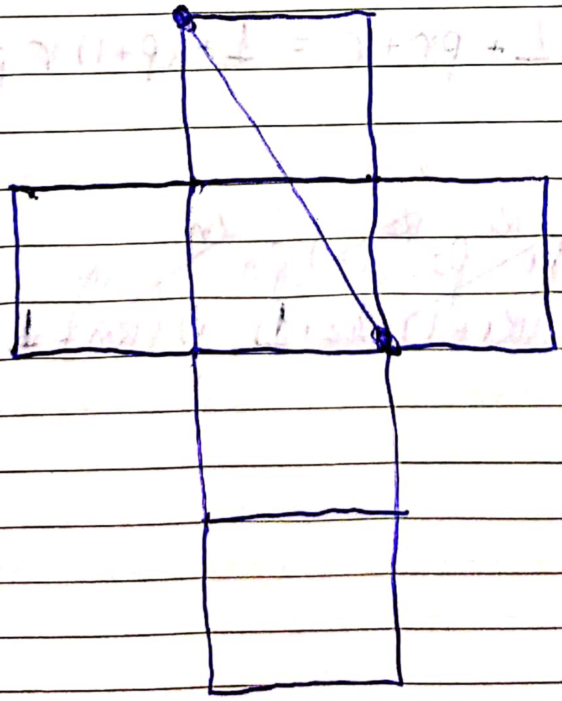
ii) Se $(1+x)^p \geq 1+pr$, (~~então~~); com $p \geq 1$, então:

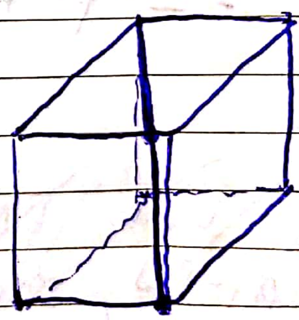
$$(1+r)^{p+1} = \underbrace{(1+r)}_{>0}(1+r)^p \underset{\text{HIP.}}{\geq} (1+r)(1+pr) =$$

$$= 1+pr+r+\underbrace{pr^2}_{>0} > 1+pr+r = 1+(p+1)r \ \blacksquare$$

(2) Uma porta $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot (\ldots) \, p_n^{\alpha_n}$, p_i primo e $\alpha_i \in \mathbb{N}$ será alterada $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\ldots)(\alpha_n+1)$ vezes. Para se manter aberta, o número de alterações deve ser ímpar. Logo, $\alpha_i + 1$ ímpar e α_i par, e, assim conclui-se que n é quadrado perfeito.

(4)





5) $x + y + z = 20$, $x, y, z \in \mathbb{N}^*$

Considere que há de se distribuir 20 balas para 3 crianças de forma que nenhuma fique sem bala. Assim, distribui-se inicialmente uma bala para cada, sobrando 17 balas para serem distribuídas livremente. Assim, o número de soluções da equação acima é dado pelo número de soluções naturais da equação abaixo:

$$x + y + z = 17 \; ; \; x, y, z \in \mathbb{N}$$

$$P_{19}^{17,2} = \frac{19!}{17!\,2!} = \frac{19 \cdot \cancel{18}^{9} \cdot \cancel{17!}}{\cancel{2}\ \cancel{17!}} = \underline{171}$$

soluções