SEMINARIO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - MAT 450 – 1º Prova – 1º semestre de 2020 – (26/06/2020)

Prof: Antônio Luiz Pereira

Nome: Henrique Augusto Nogueira   nºusp: 9794250

Questões escolhidas: 1, 2, 4 e 6

Questão 1

Base:

$$(1-1)^n \geq 1+n(-1) \Rightarrow 0^n \geq 1-n$$

Tese:

$$(1+k)^n \geq 1+nk$$

Questão 2

Proposição: O armário de número *n* ficará aberto no final se e somente se *n* for um quadrado perfeito.

Vamos inicialmente definir a função $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$, $f(n)=\text{número de divisores do número n}$.

Lema: O armário de número *n* ficará aberto se o número $f(n)$ for ímpar e ficará fechado se o número $f(n)$ for par.

De fato, para cada divisor o armário muda de estado, e o estado inicial é fechado.

Teorema Fundamental da Aritmética:

Todo número natural $n \in \mathbb{N}^*$ se escreve de forma única a menos de permutação dos fatores, como $n = P_1^{\alpha_1} \bullet P_2^{\alpha_2} \bullet \cdots \bullet P_n^{\alpha_n}$. Onde cada P_i é um número primo e $\alpha_i \geq 0$.

Lema: Se $n \in \mathbb{N}^*$ e $k = P_1^{\alpha_1} \bullet P_2^{\alpha_2} \bullet \cdots \bullet P_n^{\alpha_n}$ é única de composição de *k* em fatores primos, então $f(k) = (\alpha_1+1) \bullet (\alpha_1+1) \bullet \cdots \bullet (\alpha_n+1)$.

Lema: De fato, um número *d* divide *n*, se e somente se na decomposição de *d* em fatores primos $d = q_1^{\beta_1} \bullet q_2^{\beta_2} \bullet \cdots \bullet q_m^{\beta_m}$. Cada q_i é algum dos p_δ que comparece na fatoração de *n* e $\beta_i \le \alpha_\delta$. Ou seja $\Leftrightarrow d = p_1^{\beta_1} \bullet p_2^{\beta} \bullet \cdots \bullet p_m^{\beta_m}$.

Portanto temos para casa $i = 1,...,\text{n}$ que β_i pode ser qualquer valor do conjunto $\{0,\ 1,\ 2,\ ...,\alpha_i\}$.

Portanto para β_1, temos $(\alpha_1 + 1)$ valores possíveis. Escolhido β_1, temos $(\alpha_2 + 1)$ valores possíveis para β_2, e assim por diante.

Lema: Portanto o número total de escolhas para os $\beta_{i's}$ é $(\alpha_1 + 1) \bullet (\alpha_1 + 1) \bullet \cdots \bullet (\alpha_n + 1)$.
$f(k) = (\alpha_1 + 1) \bullet (\alpha_1 + 1) \bullet \cdots \bullet (\alpha_n + 1)$

Demonstração: Suponha que k é quadrado perfeito, $k = m^2$ para algum $m \in \mathbb{N}^*$.

Então se $m = p_1^{\beta_1} \bullet p_2^{\beta_2} \bullet \cdots \bullet p_n^{\beta_n}$ e a decomposição de 5m5 em fatores primos então $k = p_1^{2\beta_1} \bullet p_2^{2\beta_2} \bullet \cdots \bullet p_n^{2\beta_n}$.

Portanto o número de divisores de *k* pelo Lema é $f(k) = (2\beta_1 + 1) \bullet (2\beta_2 + 1) \bullet \cdots \bullet (2\beta_n + 1)$.
Portanto $f(k)$ é ímpar.

Logo se está aberto deve ser um número quadrado perfeito.

Questão 4

Questão 6

Vamos simplificar o problema pensando em apenas 2 incógnitas: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1000}$. Vamos considerar apenas os casos nos quais $x \le y$. Se este caso possuir um número finito de soluções, os outros também possuirão. Observe que se o par $(x,\ y)$ é uma solução então, necessariamente, $x \le 2000$ pois, caso contrário $y \ge x > 2000$ e $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{2000} + \frac{1}{2000} \le \frac{1}{1000}$.

Mas então, x será um número natural entre 1 e 2000 e o mesmo vale para y. Assim, o conjunto dos pares solução está contido no conjunto: $\{(x,\ y)\in N\times N : 1\le x\le 2000, 1\le y\le 2000\}$ que é finito.

Observemos agora que poderíamos trocar $\frac{1}{1000}$ por qualquer valor real positivo e o argumento seria o mesmo, ou seja, para todo $a>0$, só existe um número finito de soluções inteiras positivas para a equação $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a$.

Voltando para o problema original, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1000}$.

Podemos supor $x\le y\le z$, os outros casos são semelhantes.

Devemos ter $x\le 3000$ pois, caso contrário $y,z\ge x>3000$, e $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3000}+\frac{1}{3000}+\frac{1}{3000}\le\frac{1}{1000}$.

Sejam agora $x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n$, todos os valores de *x* para os quais existam soluções do problema. Para cada um dos x_i, teremos: $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a=\frac{1}{1000}-\frac{1}{x_i}$.

Como visto acima, o número de soluções $(y,\ z)$ para este problema é finito. Já que o número de valores possíveis para x_i é finito, o número total de triplas solução possíveis para o problema é também finito.