FLÁVIA ODENHEIMER TREVISAN - 8978788

PROBLEMA 3

$x + y + z = 20$ (considerando que a, b, c, b, a, c etc são a mesma solução)

$1 \leq x, y, z \leq 18$

$x \geq y \geq z$

$x = 18 \longrightarrow$ • $y = 1, z = 1$

$x = 17 \longrightarrow$ • $y = 2, z = 1$

$x = 16 \longrightarrow$ • $y = 3, z = 1$
• $y = 2, z = 2$

$x = 15 \longrightarrow$ • $y = 4, z = 1$
• $y = 3, z = 2$

$x = 14 \longrightarrow$ • $y = 5, z = 1$
• $y = 4, z = 2$
• $y = 3, z = 3$

$x = 13 \longrightarrow$ • $y = 6, z = 1$
• $y = 5, z = 2$
• $y = 4, z = 3$

$x = 12 \longrightarrow$ • $y = 7, z = 1$
• $y = 6, z = 2$
• $y = 5, z = 3$
• $y = 4, z = 4$

$x = 11 \longrightarrow$ • $y = 8, z = 1$

• $y = 7, z = 2$

• $y = 6, z = 3$

• $y = 5, z = 4$

$x = 10 \longrightarrow$ • $y = 9, z = 1$

• $y = 8, z = 2$

• $y = 7, z = 3$

• $y = 6, z = 4$

• $y = 5, z = 5$

$x = 9 \longrightarrow$ • $y = 9, z = 2$

• $y = 8, z = 3$

• $y = 7, z = 4$

• $y = 6, z = 5$

$x = 8 \longrightarrow$ • $y = 8, z = 4$

• $y = 7, z = 5$

• $y = 6, z = 6$

$x = 7 \longrightarrow$ • $y = 7, z = 6$

R: 33 soluções.

PROBLEMA 6

Mostre que só existe um número finito de soluções inteiras positivas para a equação

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1000}$$

Pensando no problema de forma simplificada, vamos mostrar que há um número finito de soluções para a equação

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1000}.$$

Para facilitar, vamos considerar que $x \leq y$. Assim, $\frac{1}{x}$ representaria pelo menos metade de $\frac{1}{1000}$ e, portanto, x é menor ou igual a 2000 (podemos pensar também que se $x > 2000$, temos $y \geq x > 2000$ e o valor total seria menor que $\frac{1}{1000}$).

Mas como queremos $x, y \in \mathbb{N}$, há um número finito de soluções, já que $1 \leq x \leq 2000$ e $1 \leq y \leq 2000$.

Analogamente, quando pensamos no problema inicial (com $x \leq y \leq z$), $x \leq 3000$ (pois a fração $\frac{1}{x}$ corresponderia a $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{1000}$).

Assim, temos

$$1 \leq x \leq 3000$$
$$1 \leq y \leq 3000$$
$$1 \leq z \leq 3000$$

Como queremos $x, y, z \in \mathbb{N}$, há um número finito de soluções.

PROBLEMA 2

Os armários que ficarão abertos são aqueles cujo número é um quadrado perfeito. Isso acontece porque estes números têm um número ímpar de divisores.

Repare: se o número tem um número par de divisores, o armário terminará fechado. Buscamos então aqueles que têm um número ímpar de divisores.

Quando listamos os divisores de um número, podemos formar os pares que, quando multiplicados, resultarão no próprio número. Por exemplo:

Divisores de 12:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 6 \quad 12$$

$$3 \times 4 = 12$$
$$2 \times 6 = 12$$
$$1 \times 12 = 12$$

Quando o número é um quadrado perfeito, há um divisor (a raiz do número) que resultará nele quando multiplicada por si mesma. Por exemplo:

Divisores de 36

1 2 3 4 6 9 12 18 36

$6 \times 6 = 36$

$4 \times 9 = 36$

$3 \times 12 = 36$

$2 \times 18 = 36$

$1 \times 36 = 36$

Ou seja, os números que têm um número ímpar de divisores são os quadrados perfeitos. E são estes armários que ficarão abertos: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100.

PROBLEMA 1

(O enunciado está $a \geq -1$ mas como não tem a assumi que seria $r \geq -1$)

$$r \geq -1 \Rightarrow (1+r)^n \geq 1 + nr$$

$$\text{se } r \geq -1 \Rightarrow 1 + r \geq 0$$

p/ $r = -1 \Rightarrow (1-1)^n \geq 1 - 1n \Rightarrow 0 \geq 1 - n \Rightarrow n \geq 1$ ✓

p/ $-1<r<0 \Rightarrow 0<1+r<1 \Rightarrow 0<(1+r)^n<1$

$\Rightarrow -n<nr<0 \Rightarrow 1-n<1+nr<1$

p/ $n=1 \quad (1+r)^n = 1+nr$

p/ $n>1 \quad 1+nr<0 \Rightarrow (1+r)^n > 1+nr$

$(1+r)^n > 0$

p/ $r=0 \Rightarrow (1+0)^n = 1+0\cdot n$

p/ $r>0 \Rightarrow (1+r)>1$

$(1+r)^n > (1+r)$