Seminário - Filipe Russo - 9922717

Problema 1

Base de Indução $n = 1$

$$(1+r)^1 \geq 1 + 1 \cdot r$$

$1 + r \geq 1 + r$ vale.

Passo de Indução

se vale para $n = k$ então vale para $n = k+1$, $(1+r)^k \geq 1 + k \cdot r$.

$$(1+r)^{k+1} \geq 1 + (k+1) \cdot r$$

$$(1+r)^k \cdot (1+r) \geq 1 + r + kr$$

$\Downarrow$ Hipótese de Indução

$$(1+r)^k \cdot (1+r) \geq (1+kr) \cdot (1+r) \geq 1 + r + kr$$

$$(1+r)^k \cdot (1+r) \geq kr^2 + kr + r + 1 \geq 1 + r + kr$$

$$\Downarrow$$

$$kr^2 \geq 0$$

De fato

pois $r \geq -1$ e k é natural.

$\therefore$ vale a desigualdade $(1+r)^n \geq 1 + n \cdot r$, $r \geq -1$ e n natural.

Seminário - Filipe Russo - 9922717

Problema 3

Seja $\underline{a}$ a aresta do tetraedro regular, vamos definir $\underline{r_1}$ o raio da esfera inscrita em termos de $\underline{a}$ ao dividir nosso tetraedro em 4 tetraedros de base um triângulo equilátero de aresta $\underline{a}$ e altura $\underline{r_1}$. Daí segue pelo cálculo dos volumes que

$$4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot r_1 = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{3}{a^2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{12}, \quad \boxed{r_1 = \frac{a\sqrt{6}}{12}}$$

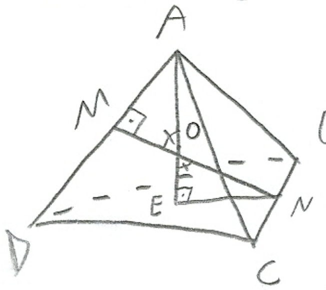
Seja $\underline{h}$ a altura do tetraedro regular. Note que $h = r_1 + r_3$, onde r_3 é o raio da esfera circunscrita. Sabe-se que a soma das distâncias de um ponto interior qualquer até as suas 4 faces é igual a altura $\underline{h}$ do tetraedro, aplicando este fato ao centro $\underline{O}$ das esferas segue que

$$4r_1 = h$$

$$\Rightarrow 4r_1 = r_1 + r_3$$

$$r_3 = 3r_1 = \frac{a\sqrt{6}}{4}, \quad \boxed{r_3 = \frac{a\sqrt{6}}{4}}$$

Considere a figura. Seja M e N os pontos médios das arestas AD e BC. O segmento $\overline{AE}$ a altura. Daí



$$\Delta AMO \sim \Delta NEO \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} \Rightarrow (r_2)^2 = r_1 \cdot r_3$$

$$\boxed{r_2 = \frac{a\sqrt{2}}{4}}$$

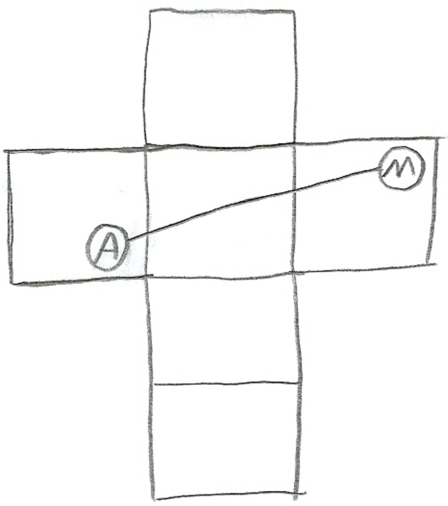
De fato $r_1 = \frac{a\sqrt{6}}{12}$, $r_2 = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ e $r_3 = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ formam uma P.G. de razão $\sqrt{3}$.

Seminário - Filipe Russo - 9922717

Problema 4

Gostaria de utilizar a noção da geometria euclideana de que a menor distância entre dois pontos é uma linha reta.
Sabendo que a aranha para chegar até a mosca precisa andar pelas faces do cubo eu o planifico como abaixo:

A: aranha
M: mosca



Por fim traço uma reta da aranha até a mosca passando por 3 das faces planificadas do cubo.

Seminário - Filipe Russo - 9922717

Problema 5

Para garantir que busco apenas as soluções inteiras positivas crio x', y' e z' da seguinte forma:

$$x = x' + 1$$
$$y = y' + 1 \Rightarrow x' + y' + z' + 3 = 20$$
$$z = z' + 1 \qquad x' + y' + z' = 17$$

As solução da equação podem ser entendidas como anagramas de uma palavra de 19 letras, composta apenas por duas letras a e b. Onde b assume o lugar do sinal "+" na hora de separar as unidades de cada variável e a representa essas unidades.

Daí $$\frac{19!}{17!\,2!} = \frac{19 \cdot \cancel{18}^{9}}{\cancel{2}} = 171$$ soluções inteiras positivas