MAT0450 - Seminário de Resolução de Problemas

Prova 1

Nome: Camilla Monteiro Gomes

N° USP: 9848388

Questões escolhidas: 1, 4, 5 e 6

QUESTÃO 1

Problema 1 (2,0)

Mostre que, se $r \geq -1$ é um número real n é um número natural, então vale a desigualdade:

$$(1+r)^n \geq 1+nr$$

$r \geq -1$ e $r \in \mathbb{R}$

$n \in \mathbb{N}$

• Vamos supor $n = 1$.

$(1+r)^1 \geq 1+1r$

$1+r \geq 1+r$

Vale para $n=1$

• Vamos supor que a solução é verdadeira para um $n=k$.

Logo: $(1+r)^k \geq 1+kr$. (*)

• Quero provar que vale para $n=k+1$

$(1+r)^{k+1} \geq 1+(k+1)r$

$\underbrace{(1+r)^k}_{(*)}(1+r) \geq 1+kr+r$

Usando a hipótese (*):

$(1+r)^k(1+r) \geq (1+kr).(1+r)$

$(1+r)^k(1+r) \geq 1+kr+r+kr^2$

Afirmo que:

$1+kr+r+kr^2 \geq 1+kr+r$, pois:

kr^2 será sempre maior ou igual a 0, já que $r^2 \geq 0$ e $k \in \mathbb{N}$.

Então, por transitividade temos que:

$$\underbrace{(1+r)^k(1+r)}_{(1+r)^{k+1}} \geq 1+kr+r+kr^2 \geq \underbrace{1+kr+r}_{1+(k+1)r}$$

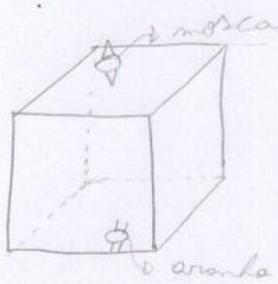
$$(1+r)^{k+1} \geq 1+(k+1)r$$

Logo, provamos a propriedade.

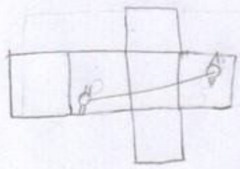
QUESTÃO 4

Problema 4(2, 5)

Uma aranha vivia na superfície do cubo. Estando um dia sobre uma das faces, percebeu que na face oposta estava pousada uma mosca, conforme indicado na figura. Qual deve ser o trajeto da aranha, de modo a atingir a mosca, percorrendo a menor distância possível?



• Para resolver esse exercício, planificarei o cubo.



• Com o cubo planificado, podemos unir a aranha e a mosca por um segmento de reta.

• De acordo com a Geometria Euclidiana, a menor distância entre dois pontos é uma reta, então podemos dizer que o segmento de reta que liga a aranha e a mosca é o caminho mais curto entre elas.

• O processo de planificar o cubo é uma transformação linear que preserva a distância, então o trajeto encontrado no plano, também é o trajeto que soluciona o problema.

QUESTÃO 5

Problema 5 (2,5)

Quantos são as soluções inteiras positivas da equação : $x + y + z = 20$?

Sejam :

$X = X' + 1$

$Y = Y' + 1$

$Z = Z' + 1$

Onde X', Y', Z' são números inteiros positivos ou zero.

Dessa forma, eu garanto que X, Y e Z serão valores inteiros positivos. Então :

$$X + Y + Z = 20$$

$$X' + 1 + Y' + 1 + Z' + 1 = 20$$

$$X' + Y' + Z' = 17.$$

Para resolver esse problema, usarei permutação.

Formarei uma "palavra" de 19 símbolos :

000 000 000 00000000 //

Se eu encontro uma palavra da seguinte forma.

$$\underbrace{00000}_{5}/\underbrace{00}_{2}/\underbrace{0000000000}_{10}$$

isso significará a solução $X' = 5$, $Y' = 2$ e $Z' = 10$.

Então de quantas formas eu posso separar essas 17 bolinhas usando as 2 barras?

$$P_{19}^{17,2} = \frac{19!}{17!\,2!} = \frac{19 \cdot \cancel{18}^{9} \cdot \cancel{17!}}{\cancel{17!}\ \cancel{2}} = 171.$$

Logo, teremos 171 "palavras", ou seja 171 soluções para o problema $X+Y+Z=20$.

QUESTÃO 6

Problema 6 (3 pontos)

Mostre que só existe um número finito de soluções inteiras para a equação

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1000}$$

Observação: Estou considerando apenas soluções inteiras positivas, igual fizemos em classe, pois se considerasse todos os inteiros, o exercício seria falso.

Vamos considerar um problema com 2 incógnitas:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1000}$$

Suponha $x \leq y$. Se estes forem um número finito, os outros também serão.

Se (x, y) é uma solução, então necessariamente $x \leq 2000$, pois caso contrário $y \geq x > 2000$ e $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{2000} + \frac{1}{2000} \leq \frac{1}{1000}$ mas então, x será um número natural entre 1 e 2000 e o mesmo vale para y. Assim, o conjunto dos pares solução está contido no conjunto:

$$\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 2000,\ 1 \leq y \leq 2000\},$$ que é finito.

Essa solução vale para qualquer $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a$, com $a > 0$. Basta repetir a mesma justificativa.

Vamos voltar ao problema:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1000}$$

Suponhamos $x \leq y \leq z$.

Devemos ter $x \leq 3000$ pois, caso contrário $y \geq z \geq x > 3000$ e $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{3000} + \frac{1}{3000} + \frac{1}{3000} \leq \frac{1}{1000}$

Sejam agora $x_1, x_2, \ldots, x_n$, todos os valores de x para os quais existam soluções do problema. Para cada x_i, teremos

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a = \frac{1}{1000} - \frac{1}{x_i}$$

Como visto anteriormente, o número de soluções (y, z) para o problema é finito. Já que o número de valores possíveis para x_i é finito, o número de valores $\underbrace{(x, y, z)}_{\text{valores para solução do problema}}$ também é finito.