Problema 2

Lema: Para $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(k)$ é ímpar se e somente se k é um quadrado perfeito.

Dem. Suponhamos que k é um quadrado perfeito, $k = m^2$ para algum número $m \in \mathbb{N}^*$.

Então se $m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n}$ é a decomposição de m em fatores primos então

$$k = \underbrace{p_1^{2\beta_1} \cdot p_2^{2\beta_2} \cdots p_n^{2\beta_n}}_{m^2}$$

$\Rightarrow$ O número de divisores de k, pelo lema visto é $\varphi(k) = (2\beta_1+1)(2\beta_2+1)\cdots(2\beta_n+1)$

Sabemos que o produto de números ímpares é ímpar, logo $\varphi(k)$ é ímpar.

Por outro lado, se $\varphi(k)$ é ímpar e $k = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ então $\varphi(k) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$ tem como resultado todos os α_i pares, ou seja, $\alpha_i = 2\beta_i$, com $i = 1, 2, \ldots, n$.

Agora, se $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_m}$, temos $m^2 = k$