Nome: Antônio Fittipaldi N° USP: 9298381

Problema 1) Para $n=0$, temos $(1+r)^n = (1+r)^0 = 1 \geq 1 = 1+0r = 1+nr$, ou seja, vale que $(1+r)^n \geq 1+nr$ para $n=0$

Façamos por indução. Suponha que valha para $n-1$ com $n \geq 1$. Então temos $(1+r)^n = (1+r)^{n-1}(1+r) \geq (1+(n-1)r)(1+r) = 1+(n-1)r + r + (n-1)r^2$, onde a desigualdade segue por hipótese de indução. Como $(n-1) \geq 0$ e $r^2 \geq 0$, temos $(n-1)r^2 \geq 0$. Então $(1+r)^n \geq 1+(n-1)r + r + (n-1)r^2 \geq 1+(n-1)r+r = 1+nr$, como queríamos.

Problema 2) A pessoa n abre apenas os armários múltiplos de n. Portanto, se um armário de nº x é aberto pela n-ésima pessoa, x é divisível por n. A recíproca é verdadeira: se x é divisível por n, x é múltiplo de n e, portanto, a n-ésima pessoa troca o estado do armário x. Assim, o estado de um armário é trocado exatamente $\varphi(x)$ vezes, onde $\varphi(x)$ é o número de divisores distintos de x. Utilizando o teorema fundamental da aritmética, podemos escrever $x = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ de única forma, com $p_1 > \ldots > p_k$ e $k \geq 0$, $\alpha_i \geq 1$. Dessa forma, o número de divisores de x é $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+k)$ (Isso se dá pelo princípio da contagem, já que podemos por α_i+1 potências distintas no i-ésimo nº primo da decomposição de x e cada uma delas nos dará um divisor distinto, sendo elas $0, 1, 2, \ldots, \alpha_i$).

Para um armário se manter aberto, ele deve ter mudado de estado um número ímpar de vezes, isto é, deve ter um número ímpar de divisores. Como seu número de divisores é $(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_k+1)$, devemos ter $(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_k+1)$ um número ímpar. Logo α_i+1 deve ser ímpar para todo i (se algum α_i+1 fosse par, teríamos $\alpha_i+1=2m$ para certo $m\geq 1$ e $(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_k+1) = 2m(\alpha_1+1)\ldots\widehat{(\alpha_i+1)}\ldots(\alpha_k+1)$ que é número par). Logo α_i deve ser par para todo $i=1,\ldots,k$ e podemos escrever $\alpha_i = 2m_i$. Daí $x = p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k} = p_1^{2m_1}\ldots p_k^{2m_k} = (p_1^{m_1}\ldots p_k^{m_k})^2$ e x é quadrado perfeito. Então os armários abertos são os quadrados perfeitos.

<u>Problema 5)</u> Consideremos uma solução como uma terna (x,y,z). Ou seja, se $x\neq x_0$, $y\neq y_0$ ou $z\neq z_0$, teremos (x,y,z) uma solução distinta de (x_0,y_0,z_0), mesmo que seja apenas uma permutação. Logo, para $1\leq x\leq 18$, temos uma soma $y+z=20-x$, ou seja, $y+z=l$ com $2\leq l\leq 18$. Portanto, o número de soluções $x+y+z=20$, é a soma do número de soluções $y+z=l$ com $2\leq l\leq 18$. Para tanto, dado $1\leq z\leq l-1$, $y=l-z$ é tal que $y+z=l$, ou seja, temos $l-1$ soluções para $y+z=l$ com $2\leq l\leq 18$. Daí o número de soluções $x+y+z=20$ é $1+2+\ldots+17 = \frac{17(17+1)}{2} = 17\cdot 9 = 153$.

Problema 6) Suponha que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1000}$. Suponhamos que $x \leq y \leq z$ (caso contrário, permutamos x, y, z de forma que tenhamos apenas uma permutação da mesma solução). Se $x \geqslant 3000$, então $z \geqslant y \geqslant x \geqslant 3000$ e $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{3000} + \frac{1}{3000} + \frac{1}{3000} = \frac{1}{1000}$, logo (x, y, z) não seria solução. Portanto, há apenas um nº finito de x_0 com (x, y, z) soluções. Para um x_0, temos $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1000} - \frac{1}{x_0} = m_0$, com $m > 0$.

Devemos ver que $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = m > 0$ tem nº finito de soluções.

Suponhamos novamente $y \leq z$. Observe que, para todo $m > 0$, existe $y_m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{y} < \frac{m}{2}$ ou seja, teríamos $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{m_0}{2} + \frac{m}{2} = m$, isto é, devemos ter $1 \leq y \leq y_m$ para que $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = m_0$ seja solução.

Logo, as soluções para $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = m_0$ são finitas e, como os m_0 são da forma $\frac{1}{1000} - \frac{1}{x_0}$ com x_0 solução e tais x_0 têm quantidade finita, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1000}$ tem nº de soluções finitas