P 1 - MAT0450 - André Ch. Benites

Problema 2: Podemos perceber que os armários que ficaram abertos são os que mudar de estado um número ímpar de vezes. E os armários mudam de estado toda a vez que o número da pessoa (em ordem de chegada) é divisor do número da porta.

Portanto, a resposta é o conjunto de números de 1 a 100 que possui um número ímpar de divisores. Estes são os quadrados perfeitos, pois para todo natural "n", podemos parear qualquer divisor d com outro divisor $\frac{n}{d}$. $\frac{n}{d}$ é diferente de d, a não ser que $d = \sqrt{n}$. Portanto, se $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$, então $\sqrt{n}$ "faria par" consigo mesmo e todos os outros divisores fariam par com outros, formando um "número par somado a um" de divisores, ou seja, tendo um número ímpar de divisores.

Representação visual:

$1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16$

$1 \times 16 = 16$
$2 \times 8 = 16$
$4 \times 4 = 16$

$16 = 4^2$ e possui 3 divisores

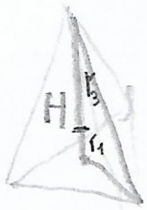
Problema 3:

$$\begin{cases} \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + (r_2)^2 = (r_3)^2 \\ \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (r_1)^2 = (r_3)^2 \\ (r_1)^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{6}\right)^2 = (r_2)^2 \end{cases}$$

$R = \frac{2}{3} h = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}$

$r = \frac{1}{3} \cdot h = \frac{1}{3}\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$

Baricentro divide a mediana em $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$



$H^2 + R^2 = \ell^2$

$H^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}\ell^2$

$H = \ell \frac{\sqrt{6}}{3}$ *

$r_1 + r_3 = H$

Descobrindo r_1 e r_3 em função de ℓ

$$\begin{cases} r_1 + r_3 = H^{*} = \frac{\ell\sqrt{6}}{3} \\ \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (r_1)^2 = r_3^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_3 = \frac{\ell\sqrt{6}}{3} - r_1 \\ \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (r_1)^2 = (r_3)^2 \end{cases}$$

$\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{3}\right)^2 + r_1^2 = \left(\frac{\ell\sqrt{6}}{3} - r_1\right)^2$

$\frac{\ell^2}{3} + \cancel{r_1^2} = \cancel{r_1^2} - \frac{2 \cdot r_1 \ell\sqrt{6}}{3} + \frac{\ell^2 2}{3}$

$\frac{\ell^2}{3} = \frac{2}{3} r_1 \ell\sqrt{6}$

$\boxed{r_1 = \frac{\ell}{2\sqrt{6}} = \frac{\ell\sqrt{6}}{12}}$

$r_3 = \frac{\ell\sqrt{6}}{3} - r_1 = \frac{\ell\sqrt{6}}{3} - \frac{\ell\sqrt{6}}{12}$

$\boxed{r_3 = \frac{4\ell\sqrt{6}}{12} - \frac{\ell\sqrt{6}}{12} = \frac{3\ell\sqrt{6}}{12} = \frac{\ell\sqrt{6}}{4}}$

Descobrindo r_2 a partir de r_1 e r_3.

$(r_2)^2 = (r_1)^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{\ell^2}{24} + \frac{\ell^2}{12} = \frac{\ell^2 3}{24} = \frac{\ell^2}{8}$

$\boxed{r_2 = \frac{\ell\sqrt{2}}{4}}$ ou $\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + r_2^2 = \left(\frac{\ell\sqrt{6}}{4}\right)^2 \Rightarrow (r_2)^2 = \frac{\ell^2 3}{8} - \frac{\ell^2}{4}$

$r_2^2 = \frac{\ell^2}{8}$

$r_1 < r_2 < r_3$

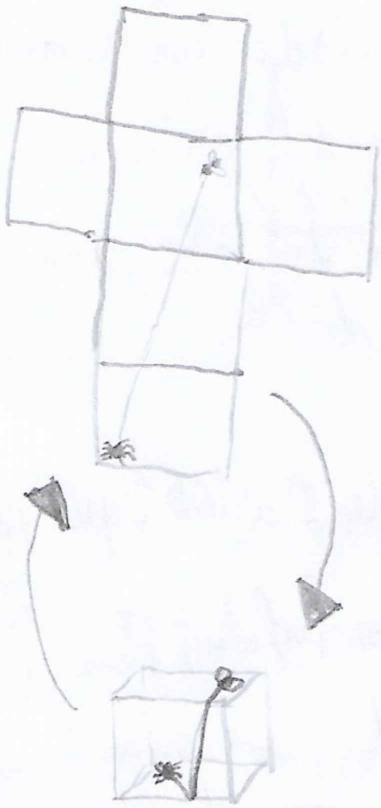
$\frac{\ell\sqrt{6}}{12} \xrightarrow{\times\sqrt{3}} \frac{\ell\sqrt{2}}{4} \xrightarrow{\times\sqrt{3}} \frac{\ell\sqrt{6}}{4}$

$\frac{\ell\sqrt{6}}{12} < \frac{\ell\sqrt{2}}{4} < \frac{\ell\sqrt{6}}{4}$

Solução:

r_1, r_2 e r_3 estão em P.G.

Problema 4: Planificando o cubo:



Sabemos que a menor distância na planificação é a linha reta, portanto, o menor caminho no problema do cubo é o mesmo caminho pois não há deformação nas distâncias pela planificamos do poliedro.

Problema 5: Observamos que o problema é equivalente ao problema de permutação de 20 pedras e 3 gravetos se deixarmos pelo menos uma pedra em cada espaço delimitado pelo graveto.

Ex:

$$5 + 2 + 13 = 20$$

Como o problema pede soluções positivas, seria como colocar uma pedra em cada espaço, ou fazer a permutação com 17 gravetos para ver quanto irá adicionar para cada espaço

$$3 + 4 + 10 = 17$$

$$(1+3)+(1+4)+(1+10)=20$$

$$4 + 5 + 11 = 20 \checkmark \quad x=4,\ y=5 \text{ e } z=11$$

Portanto, o número de soluções é igual a $P_{19}^{17,2}$ (Ou seja, permutação de 19 elementos com 17 e 2 elementos repetidos.

$$P_{19}^{17,2} = \frac{19!}{17!\,2!} = \frac{19\times 18\times \cancel{17!}}{\cancel{17!}\,2\times 1} = 19\times 9 = 171 \text{ soluções}$$

Existem 171 soluções considerando que a ordem importa, ou seja, (5,5,10) e (10,5,5) são soluções diferentes.