Anderson Nunes da Silva

Nº USP: 9848562

Prova 1 - SEMINÁRIOS

Problema 5:

Soluções inteiras positivas de: $x+y+z=20$

temos que através dos cálculos encontrar não todas as soluções, mas somente as positivas; desse modo faremos:

Sejam,

$$\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' + 1 \\ z = z' + 1 \end{cases}$$

sendo que x', y' e z' são números inteiros que podem assumir valores positivos e o valor zero. Com isso podemos garantir que x, y e z terão um valor positivo:

$$x + y + z = 20$$
$$x'+1 + y'+1 + z'+1 = 20$$
$$x' + y' + z' = 17$$

seja cada sinal + designado para separar os valores x', y' e z'. Logo todas as soluções são de um modo comparado a um anagrama:

$$\underbrace{|||||||||||||||||}_{\text{17 traços}}\ \underbrace{++}_{\text{2 sinais}}$$

que resulta:

$$\frac{19!}{17!\,2!} = \frac{19 \cdot 18}{2} = 171 \text{ soluções}$$

problema 1:

$r \geq -1 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

① base:

$P(1) \Rightarrow (1+r)^1 \geq 1+1.r \Rightarrow 1 \geq 1$

② Hipótese de Indução:

seja $P(K)$ verdadeiro, $\forall K \in \mathbb{N}$, logo $P(K+1)$ também é verdadeiro:

$(1+a)^K \geq 1+K.a$

③ Tese:

Para $n = K+1$, temos:

$(1+a)^{K+1} \geq 1+(K+1).a$

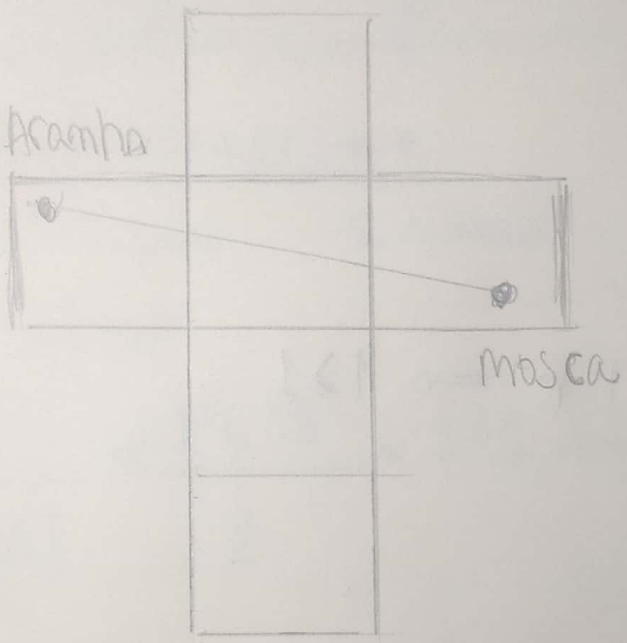
$\underbrace{(1+a)^K}_{\text{HIPOTESE}} . (1+a)^1 \geq 1+aK+a$

$(1+Ka)(1+a) \geq 1+aK+a$

$1+a+Ka+Ka^2 \geq 1+aK+a \Rightarrow Ka^2 \geq 0$

Logo, pelo princípio de Indução é verdadeiro, pois Ka^2 sempre será maior ou igual a zero.

Problema 4:



Raciocínio: tenho como pensamento, dois tipos de respostas, sendo a primeira, a seguinte: planificando o cubo, podemos demonstrar melhor o raciocínio, sendo que usei como justificativa da resposta, os princípios básicos da geometria euclidiana. "A menor distância entre dois pontos é uma reta".

Logo, planificando o cubo temos uma linha reta ligando os pontos, que no modo prático seria a Aranha seguindo a linha pelas faces:

O segundo modo seria caso a Aranha pudesse atravessar o interior do cubo, fazendo com que o caminho fosse até mais curto.

Problema 6:

Soluções inteiras de: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1000}$

Vamos considerar primeiramente um caso com 2 incógnitas:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1000}$$

Primeiramente temos os casos nos quais $x \leq y$. Se estes casos forem um número finito, logo o contrário também será.

Podemos considerar que o par (x, y) é uma solução, portanto necessariamente, $x \leq 2000$ pois caso contrário $y \geq x > 2000 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{2000} + \frac{1}{2000} \leq \frac{1}{1000}$$

Se x pode ser um número natural entre 1 e 2000, o mesmo acontece para y.

Portanto, o conjunto dos pares de solução está contido no conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 2000,\ 1 \leq y \leq 2000\}$$

que é finito.

Agora, tratando o problema com as 3 incógnitas:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1000}$$

Supondo que $x \leq y \leq z$, logo:

O valores de x será: $x \leq 3000$, pois caso contrário $y, z \geq x > 3000 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{3000} + \frac{1}{3000} + \frac{1}{3000} \leq \frac{1}{1000}$$

Sendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ todos os valores de x possíveis, e para um dos x_i, temos:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1000} - \frac{1}{x_i}$$

Sendo que como visto o numero de soluções para duas incognitas (y, z) é finito. E o número de x_i também é finito, logo o valor do problema com 3 inconitas também é finito.