## Questão 1

Mostrar que vale a desigualdade $(1+r)^n \geq 1 + r \cdot n$ , $a \geq -1$

① **Base:**

$P(1) \rightarrow (1+a)^1 \geq 1 + 1 \cdot a \rightarrow 1 \geq 1$ ✓

② **Hipótese indutiva:**

Seja $P(k)$ verdadeiro, $\forall k \in \mathbb{N}$, então $P(k+1)$ também é.

Sendo assim: $\boxed{(1+a)^k \geq 1 + k \cdot a}$ (HI)

③ **Tese:**

Seja $n = k+1$, teremos:

$$(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1) \cdot a$$

$$\underbrace{(1+a)^k}_{HI}(1+a)^1 \geq 1 + ak + a$$

Ao substituirmos pela Hipótese de indução, temos:

$$(1 + k \cdot a)(1+a) \geq 1 + k \cdot a + a$$

$$1 + a + k \cdot a + ka^2 \geq 1 + a + k \cdot a$$

(*) $ka^2 \geq 0$, pois $a \geq -1$; sendo ele sempre será positivo.

Portanto a desigualdade é verdadeira.

Digitalizado com CamScanner

## Questão 2

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ~~2~~ | ~~3~~ | 4 | ~~5~~ | ... | 100 |

Proposição: O armário de número n ficará aberto no final se e somente se n for um quadrado perfeito.

Vamos inicialmente definir a função

$f(n) = n^{\circ}$ de divisores do numero $n$.

Lema: O armário de número n ficará aberto se o número de divisores $f(n)$ for ímpar e ficará fechado se $f(n)$ for par.

Teorema (Fundamental da Aritmética)

Todo número natural maior que 1 ou é primo ou pode ser escrito de maneira única, a menos na ordem dos fatores, como produto de números primos.

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$$ , onde $p_i$ é um número primo e $\alpha_i \geq 0$

Lema:

Se $n \in \mathbb{N}^*$ e $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ é a única composição de n em fatores primos, então

$$\boxed{f(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_n + 1)}$$

Demonstração:

De fato, um número d divide n se e somente se na decomposição de d em fatores primos

$$d = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdots q_n^{\beta_n}$$ , onde cada $q_i$ é um número primo e $\beta_i \leq \alpha_j$

ou seja, se e somente se $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n}$

Portanto, temos para cada $p = 1, \ldots, n$ que $\beta_i$ pode ser qualquer valor no conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, \alpha\}$

Para $\beta_i$, temos $(\alpha_1 + 1)$ valores possíveis

Escolhido $\beta_1$, temos $(\alpha_2 + 1)$ valores, para $\beta_2$ temos $(\alpha_2 + 1)$, e assim por diante até $(\alpha_n + 1)$ valores possíveis para $\beta_n$.

Lema: Para cada $K \in \mathbb{N}$, $K = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ e $f(K) = (\alpha_1+1)(\ldots)(\alpha_n+1)$

$\therefore$ o número total de escolhas para os $\beta_i$'s é

$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\ldots)(\alpha_n+1)$

$\therefore f(K) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\ldots)(\alpha_n+1)$

Lema: Para $K \in \mathbb{N}^*$, $f(K)$ ímpar $\Leftrightarrow$ K é quadrado perfeito.

Demo: Suponhamos que K é quadrado perfeito, $K = m^2$, para algum $m \in \mathbb{N}^*$. Então se $m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n}$ é a decomposição de m em fatorem primos, então $K = p_1^{2\beta_1} \cdot p_2^{2\beta_2} (\ldots) p_n^{2\beta_n}$.

Portanto o número de divisores de K, pelo Lema 1, é

$f(K) = (2\beta_1+1)(2\beta_2+1)(\ldots)(2\beta_n+1)$

$\therefore$ $f(K)$ é ímpar

Por outro lado, se $f(K)$ é ímpar e $K = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ então

$f(K) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\ldots)(\alpha_n+1)$

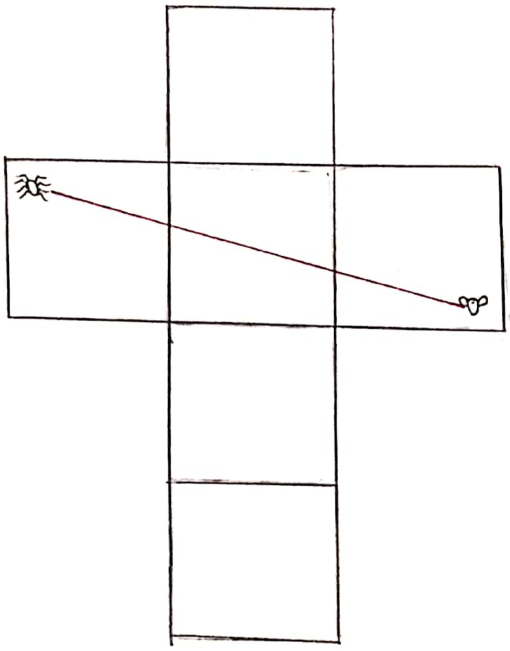
$\therefore$ Se $m = p_1^{\beta_1} \cdot (\ldots) \cdot p_m^{\beta_m}$, teremos $m^2 = p_1^{2\beta_1} \cdot (\ldots) \cdot p_m^{2\beta_m} = K$

Daí, o resultado segue imediatamente.

Questão 4

No geometria euclidiana, sabemos que a menor distância entre dois pontos é uma linha reta.

Sendo assim, conseguimos resolver esse problema planificando o cubo e traçando uma reta entre a aranha e a mosca, pois é uma transformação linear que preserva as distâncias.



Sendo assim, calculando a distância pela figura planificada, teremo a distância percorrida pela aranha pelas faces do cubo.

## Questão 5

→ Soluções inteiras positivas de $x+y+z=20$

Preciso contar quantas são as soluções da equação $x+y+z=20$, no caso, a quantidade de soluções inteiras e positivas.

Seja $\begin{cases} x = x'+1 \\ y = y'+1 \\ z = z'+1 \end{cases}$ $x'$, $y'$ e $z'$ podem assumir valores positivos ou até mesmo o valor zero.

Isso vai me garantir que $x, y, z$ terão valores positivos

$$x+y+z=20$$

$$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)=20$$

$$\boxed{x'+y'+z'=17}$$

No caso, temos um anagrama, sendo que nossa "palavra" tem 19 letras, sendo 17 de um tipo e 2 de outro tipo:

$$\frac{19!}{17!\,2!} = \frac{19 \cdot \overset{9}{\cancel{18}} \cdot \cancel{17!}}{\cancel{17!}\,\cancel{2!}} = 19 \cdot 9 = 171$$

Portanto teremos 171 soluções.