

Prova MAT0450Problema 1:

Provemos que se  $r \geq -1$  é um real e  $n$  é um número natural, então vale:  $(1+r)^n \geq 1+nr$ .

Prova por indução:

Caso inicial  $n=1$ . Temos

$$(1+r)^1 = 1+r.$$

E mais:  $1+1 \cdot r = 1+r.$

Portanto, para  $n=1$  o resultado é válido.

Hipótese de indução. Assuma que para  $n=k$  vale

$$(1+r)^k \geq 1+kr.$$

Tese: Provemos que vale para  $n=k+1$ .

Temos:

$$(1+r)^{k+1} = (1+r)^k \cdot (1+r) \geq (1+kr)(1+r) =$$

$$1+r+kr+\underbrace{kr^2}_{\geq 0} \geq 1+r+kr = 1+(k+1)r.$$

A última desigualdade se verifica pois  $r \geq -1$ ,  $k$  é natural.

A primeira desigualdade se aplica pela Hipótese de Indução.

E o resultado está provado.



### Problema 3:

Consideremos um tetraedro regular de aresta  $l$ .

Raio da esfera circunscrita ao tetraedro:  $r_3$

$$r_3 = \frac{\sqrt{6}}{4} l.$$

Raio da esfera que tangencia as arestas:  $r_2$

$$r_2 = \frac{l\sqrt{2}}{4}$$

Raio da esfera inscrita:  $r_1$

$$r_1 = \frac{l\sqrt{6}}{12}$$

$$\text{Logo: } \frac{r_2}{r_1} = \frac{\frac{l\sqrt{2}}{4}}{\frac{l\sqrt{6}}{12}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow r_2 = r_1\sqrt{3}.$$

$$\frac{r_3}{r_2} = \frac{\frac{l\sqrt{6}}{4}}{\frac{l\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{3} \Rightarrow r_3 = r_2 \cdot \sqrt{3} = r_1\sqrt{3}\sqrt{3} = r_1\sqrt{3}^2.$$

Logo, os raios formam uma progressão geométrica de razão  $\sqrt{3}$ .



## Problema 5

Vamos encontrar o nº de soluções inteiras positivas da equação  $x + y + z = 20$ .  
Sejam  $r, s$  e  $t$  tais que.

$$r = x - 1 \Rightarrow x = r + 1$$

$$s = y - 1 \Rightarrow y = s + 1$$

$$t = z - 1 \Rightarrow z = t + 1$$

Para que encontremos um problema equivalente onde não há zeros nas soluções.

$$\text{Temos } (r+1) + (s+1) + (t+1) = 20$$

$$r + s + t = 17$$

Basta encontrar o número de soluções inteiras não negativas desta última equação.

Faremos uma combinação completa "misturando" o valor 17 com as operações de + que são 2, e faremos essa combinação com a quantidade de "+"

$$\text{Assim: } C_{17+2, 2} = C_{19, 2} = \binom{19}{2} = \frac{19 \times 18 \times 17!}{2! \cdot 17!} = 171$$

resultado que assumimos como entendido em "sala de aula" o ser porque.

Logo, temos 171 soluções inteiras <sup>positivas</sup> da equação  $x + y + z = 20$ .



Problema 6: Mostremos que só existe um número finito de soluções inteiras positivas para a equação:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1000}$$

Primeiramente consideremos um problema com apenas 2 variáveis

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1000}$$

Fixemos  $x \leq y$  (se o n.º de soluções é finito aqui, para  $x > y$  também o é).

Se  $(x, y)$  é solução, então  $x \leq 2000$ , pois caso contrário  $y > x > 2000$  e

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{2000} + \frac{1}{2000} \leq \frac{1}{1000}.$$

mas  $x$  é um número natural entre 1 e 2000 e  $y$  também.

Logo, o conjunto de pares de soluções está no conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 2000, 1 \leq y \leq 2000\}, \text{ que é finito.}$$

Podemos fixar  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a$  e voltar ao problema original

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1000}.$$

De forma análoga acima, podemos supor  $x \leq y \leq z$ , já que nos demais casos o resultado é semelhante.

Temos  $x \leq 3000$ , pois se não  $y, z > x > 3000$  e

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{3000} + \frac{1}{3000} + \frac{1}{3000} \leq \frac{1}{1000}$$

Tome  $x_1, x_2, \dots, x_n$  valores de  $x$  tais que existam soluções.

Para cada  $x_i$   $i=1, \dots, n$ , temos

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a = \frac{1}{1000} - \frac{1}{x_i}$$

e como vimos acima este problema tem um n.º finito de soluções e portanto temos um n.º de

triplos  $(x, y, z)$  que satisfazem o problema. ■