Transformada Discreta de Fourier

Funções amostradas

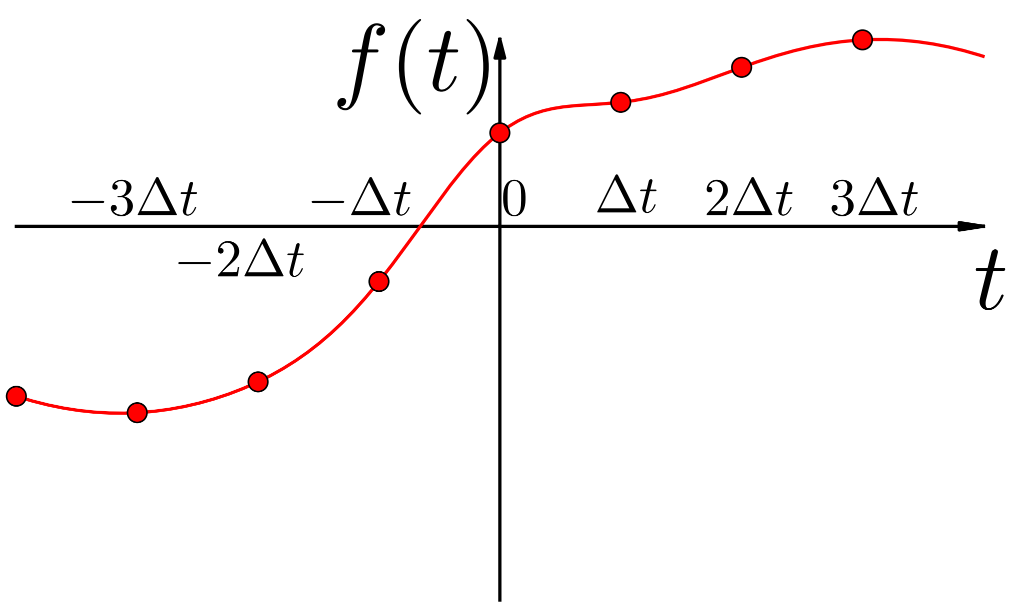
Seja $f(t)$ em $-\infty < t < \infty$

e seja $\{f(k\Delta t)\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$

o conjunto dos valores de $f(t)$ nos pontos $t = k\Delta t$

Δt é o intervalo de amostragem

$\{f(k\Delta t)\}$ é o conjunto de amostras de $f(t)$

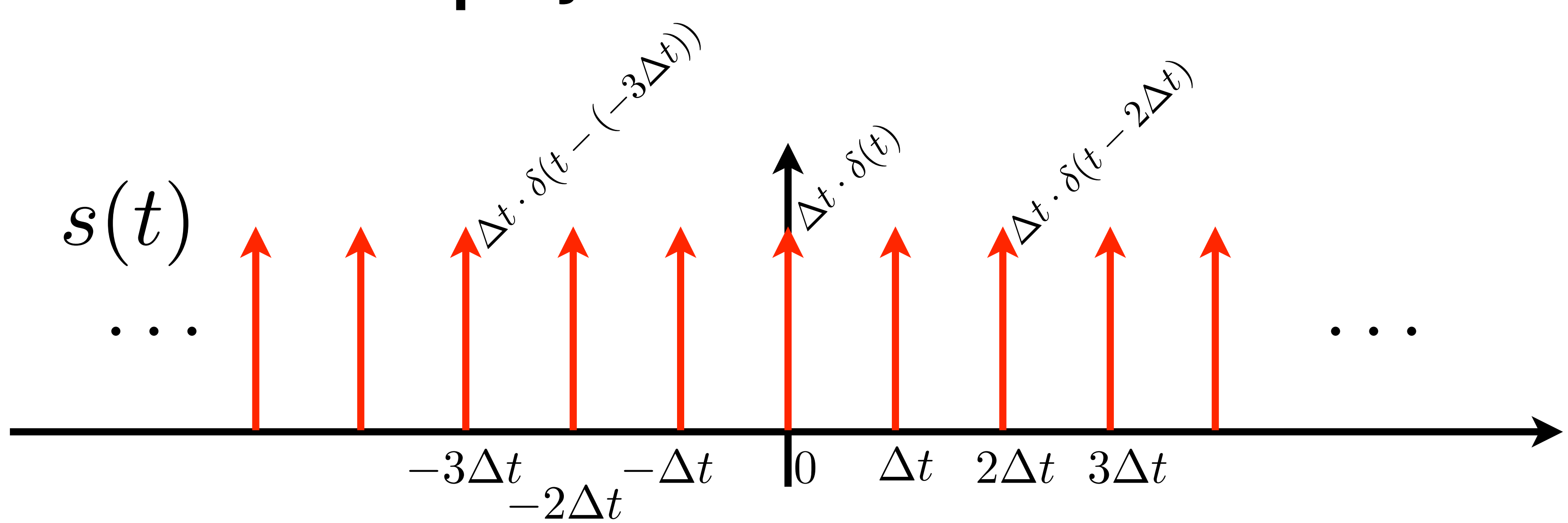


Operador de amostragem

Seja $s(t)$ o operador de amostragem

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta t \cdot \delta(t - k\Delta t)$$

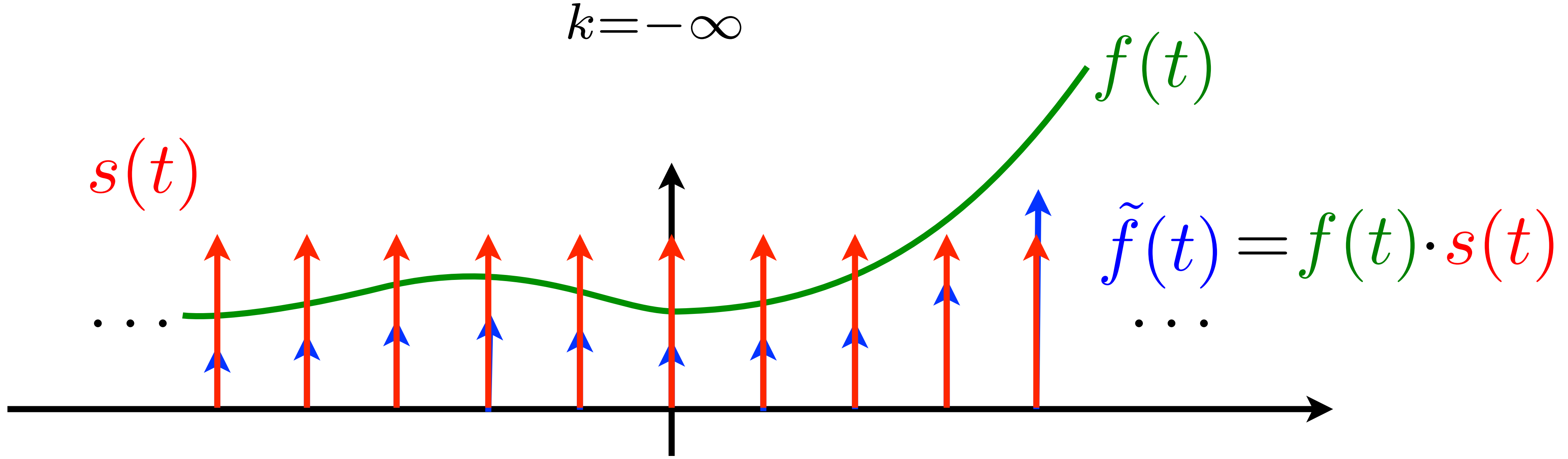
$s(t)$ é um trem de impulsos com amplitude (área) Δt e espaçadas de Δt



Função amostrada

Seja $\tilde{f}(t)$ a função $f(t)$ amostrada

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t) &= f(t) \cdot s(t) \\ &= f(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta t \delta(t - k\Delta t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta t \cdot f(t) \cdot \delta(t - k\Delta t)\end{aligned}$$



Transformada de Fourier da função amostrada

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(w) &= \mathcal{F}(\tilde{f}(t)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{-iwt} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta t \cdot f(t) \cdot \delta(t - k\Delta t) \right] e^{-iwt} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Delta t \cdot f(t) \cdot \delta(t - k\Delta t) e^{-iwt} dt \right]
\end{aligned}$$

Transformada de Fourier da função amostrada

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)}$$

$$\tilde{F}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Delta t \cdot f(t) \cdot \delta(t - k\Delta t) e^{-iwt} dt \right]$$

$$\boxed{\tilde{F}(w) = \frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta t) e^{-iwk\Delta t}}$$

Transformada Discreta de Fourier

Transformada de Fourier da função amostrada

Relembrando: $$f(t) * g(t) \Longleftrightarrow \sqrt{2\pi}F(w) \cdot G(w)$$

Semelhantemente: $$\sqrt{2\pi}f(t) \cdot g(t) \Longleftrightarrow F(w) * G(w)$$ *Verifique!*

$$f(t) \cdot g(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(w) * G(w)$$

Assim...

$$\tilde{f}(t) = f(t) \cdot s(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(w) * S(w) = \tilde{F}(w)$$

Transformada de Fourier da função amostrada

Desenvolvendo $s(t)$ em série de Fourier

($s(t)$ é função periódica de período Δt)

$$s(t) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta t \cdot \delta(t - k\Delta t)}_{\text{Operador Amostragem}} = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikw_0 t}}_{\text{Série de Fourier}} \qquad w_0 = \frac{2\pi}{\Delta t}$$

$$c_k = \frac{1}{\Delta t}\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} s(t) e^{-ikw_0 t} dt$$

$s(t) = \Delta t \delta(t)$ neste itervalo

$$= \frac{1}{\cancel{\Delta t}}\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \cancel{\Delta t}\delta(t) e^{-ikw_0 t} dt = 1$$

$$\boxed{c_k = 1}$$

Transformada de Fourier da função amostrada

Assim... $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikw_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikw_0 t}$

Calculando a transformada de Fourier de $s(t)$

$$S(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-iwt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikw_0 t} e^{-iwt} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikw_0 t} e^{-iwt} dt}_{\mathcal{F}(e^{ikw_0 t}) = \sqrt{2\pi}\delta(w - kw_0)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\pi}\delta(w - kw_0)$$

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}(\delta(w - w_0)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iw_0 t}}$$

Transformada de Fourier da função amostrada

$$S(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\pi}\delta(w - kw_0)$$

$$\tilde{F}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(w) * S(w)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(w) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\pi}\delta(w - kw_0)$$

$$= F(w) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(w - kw_0)$$

$$\boxed{f * (g + h) = f * g + f * h}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(w) * \delta(w - kw_0)$$

Transformada de Fourier da função amostrada

$$\tilde{F}(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(w) * \delta(w - kw_0)$$

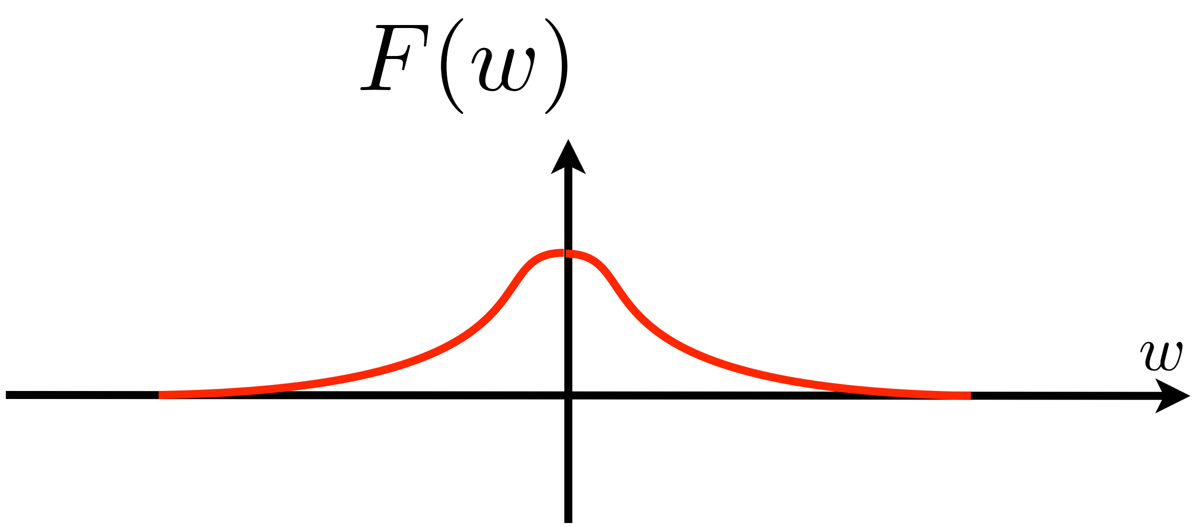
$$\boxed{f(x) * \delta(x-a) = f(x-a)}$$

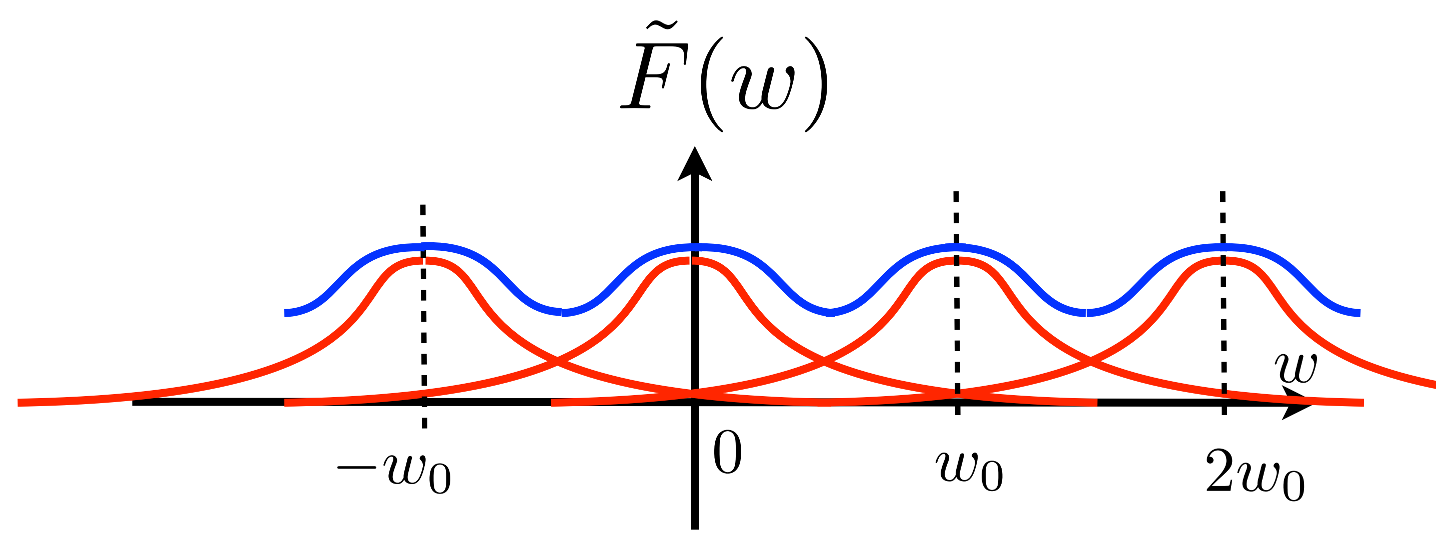
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(w - kw_0)$$

$$\boxed{\tilde{F}(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(w - kw_0)}$$

Transformada de Fourier da função amostrada

$$\boxed{\tilde{F}(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(w - k w_0)}$$



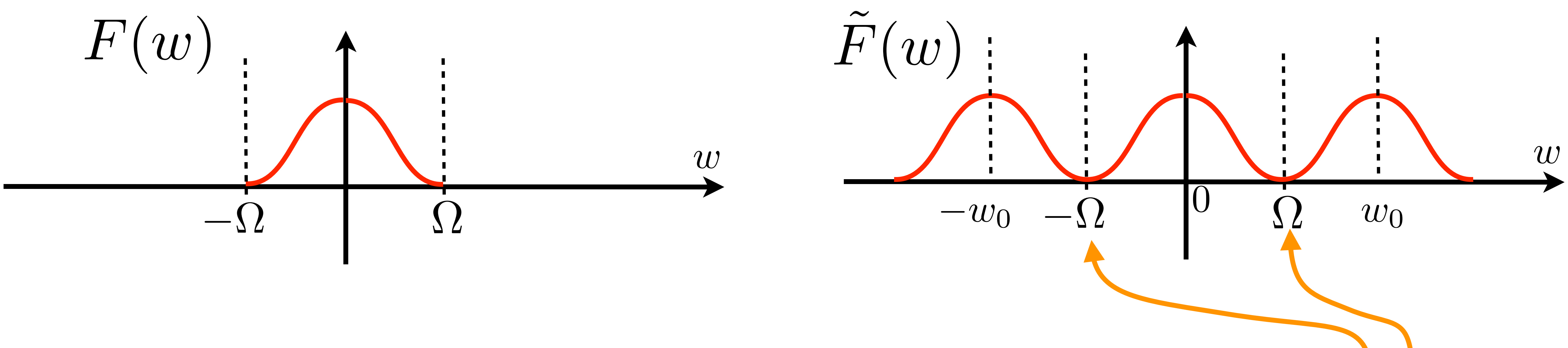


O espectro de $\tilde{f}(t)$ é igual ao espectro da função original $f(t)$ somado com "cópias" deslocadas de $w_0 = 2\pi/\Delta t$

Transformada de Fourier da função amostrada

Considere que $\tilde{f}(t)$ seja uma função de espectro limitado em Ω

$$F(w) = 0 \text{ para } w > \Omega \text{ e } w < -\Omega$$



Δt é escolhido tal que $w_0 > 2\Omega$ assim não há sobreposição

$$w_0 = \frac{2\pi}{\Delta t}$$

Teorema da amostragem de Nyquist-Shannon

Harry Nyquist
(1889–1976)

Claude Elwood Shannon
(1916–2001)

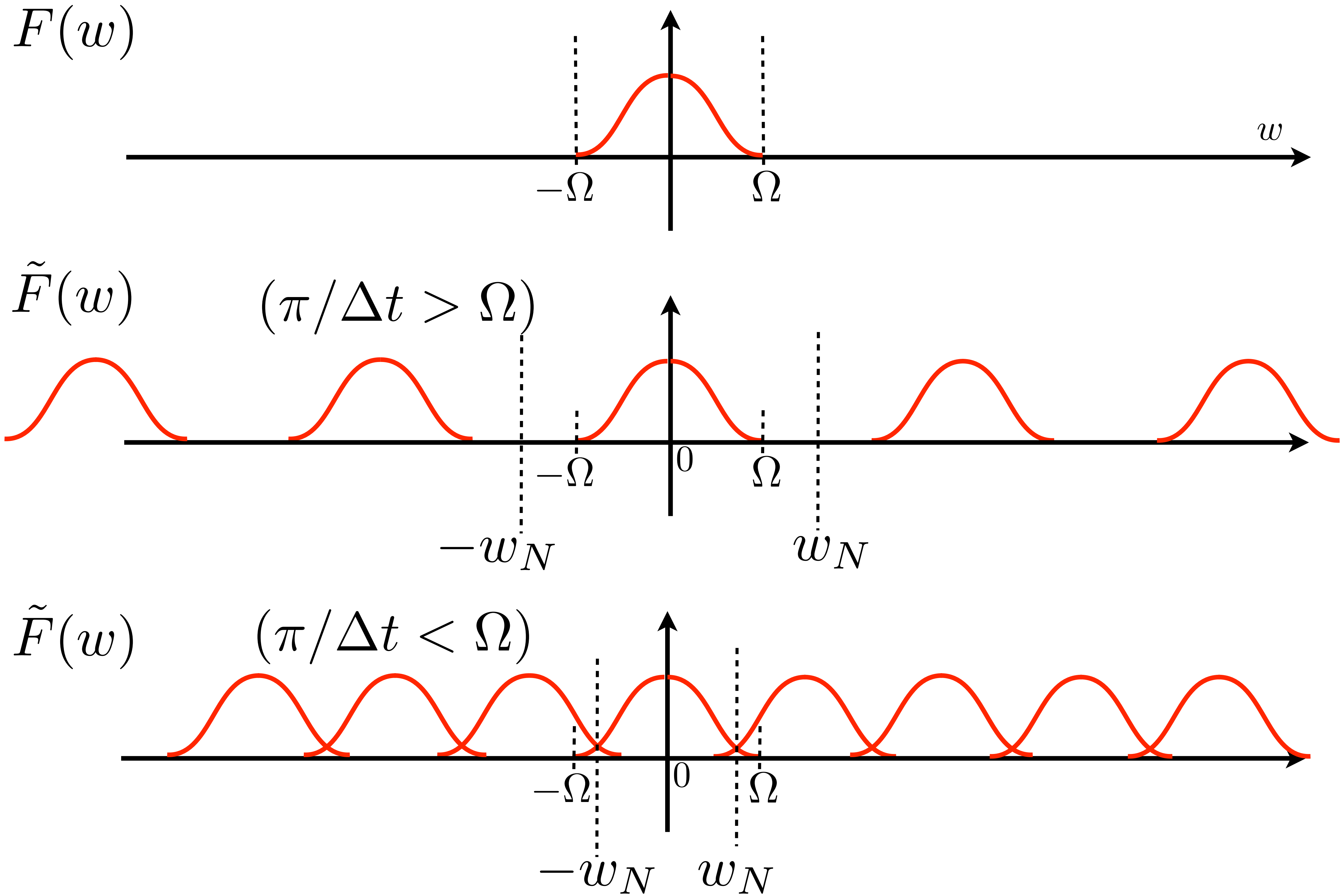
Seja $f(t)$ uma função de espectro limitado com limite espectral Ω e seja o conjunto de amostras de $f(t)$ em intervalos Δt com $\pi/\Delta t > \Omega$, então

$$\tilde{F}(w) = F(w) \text{ para}$$
$$-\pi/\Delta t \leq w \leq \pi/\Delta t$$

onde

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt \qquad \tilde{F}(w) = \frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta t) e^{-iwk\Delta t}$$

Teorema da amostragem de Nyquist-Shannon



Erro de amostragem

Sejam duas funções periódicas

$$f(t) = \cos w_1 t$$

$$g(t) = \cos w_2 t$$

Considere-se as amostras dessas funções com intervalo de amostragem Δt

$$f_k = \cos(w_1 k \Delta t)$$

$$g_k = \cos(w_2 k \Delta t)$$

$$w_1 \neq w_2$$

$$w_2 - w_1 = \Delta w$$

$$w_2 = \Delta w + w_1$$

Erro de amostragem

$$g_k = \cos(w_2 k\Delta t) = \cos\left[(w_1 + \Delta w)k\Delta t\right]$$

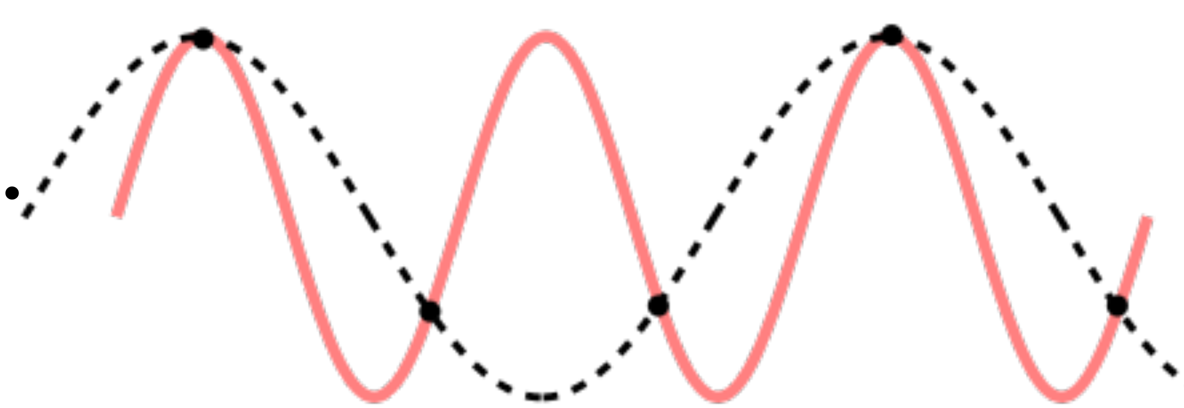
$$= \cos\left[w_1 k\Delta t + \Delta w k\Delta t\right]$$

$$\text{Se } \Delta t\Delta w = \text{ multiplo de } 2\pi$$

$$g_k = \cos\left[w_1 k\Delta t + \Delta w k\Delta t\right] \quad = \cos\left[w_1 k\Delta t\right] \; = f_k$$

Portanto, as funções f e g são indistinguíveis em termos de suas amostras.

w_1 e w_2 são aliases uma da outra.



Relação entre frequência e frequência angular

w da transformada de Fourier é a frequência angular

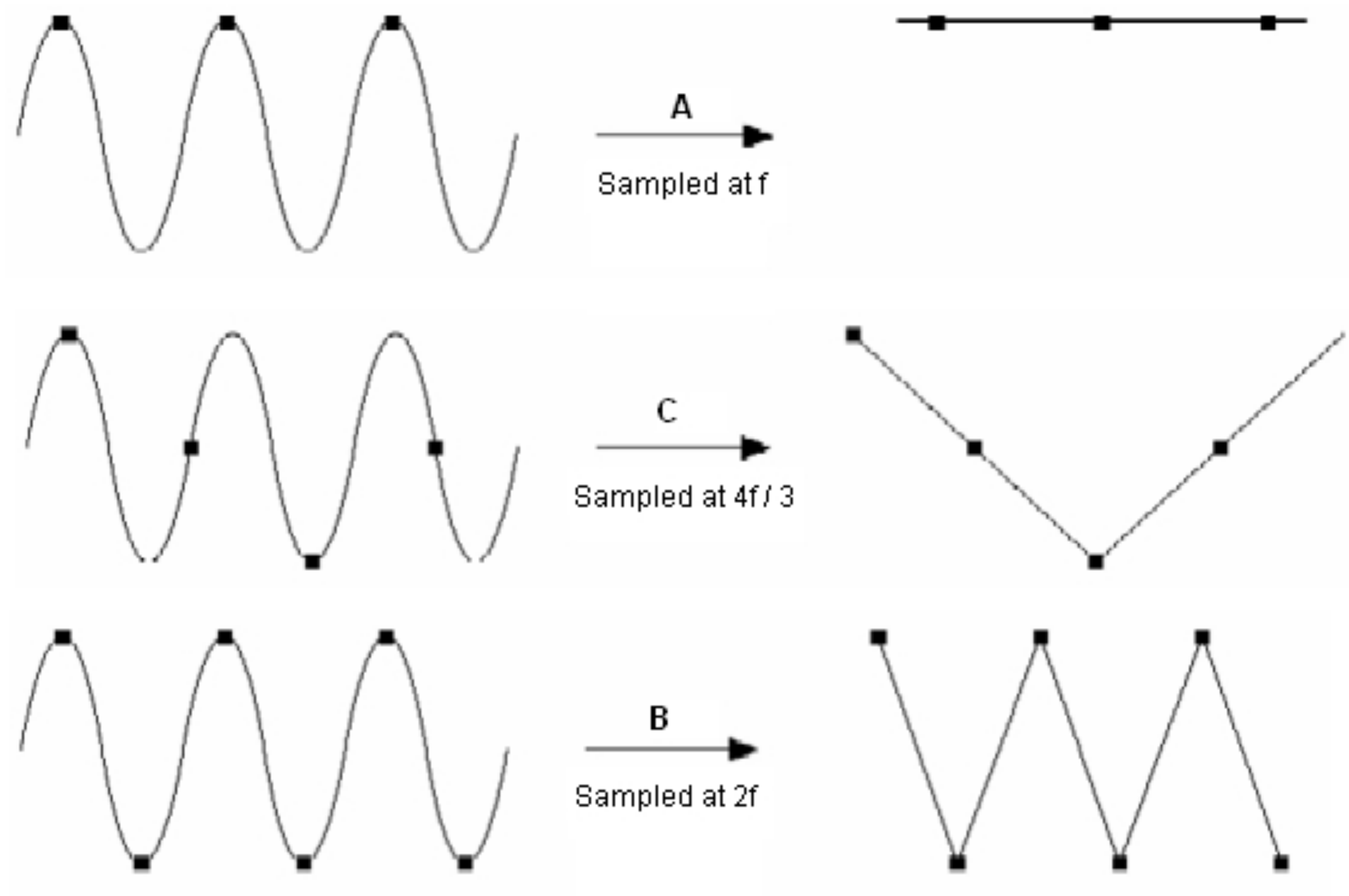
$$w = 2\pi\nu$$

$$\nu = \frac{1}{T}$$ (frequência)

$$w = \frac{2\pi}{T}$$ (frequência angular)

	Se t é tempo	Se t é espaço
$\nu = \frac{1}{T}$ (frequência)	ν (Hz)	$\left(\frac{\text{ciclos}}{\text{unid. de compr.}}\right)$
$w = \frac{2\pi}{T}$ (frequência angular)	w (rad./s)	(número de onda) (rad./m)

Erro de amostragem



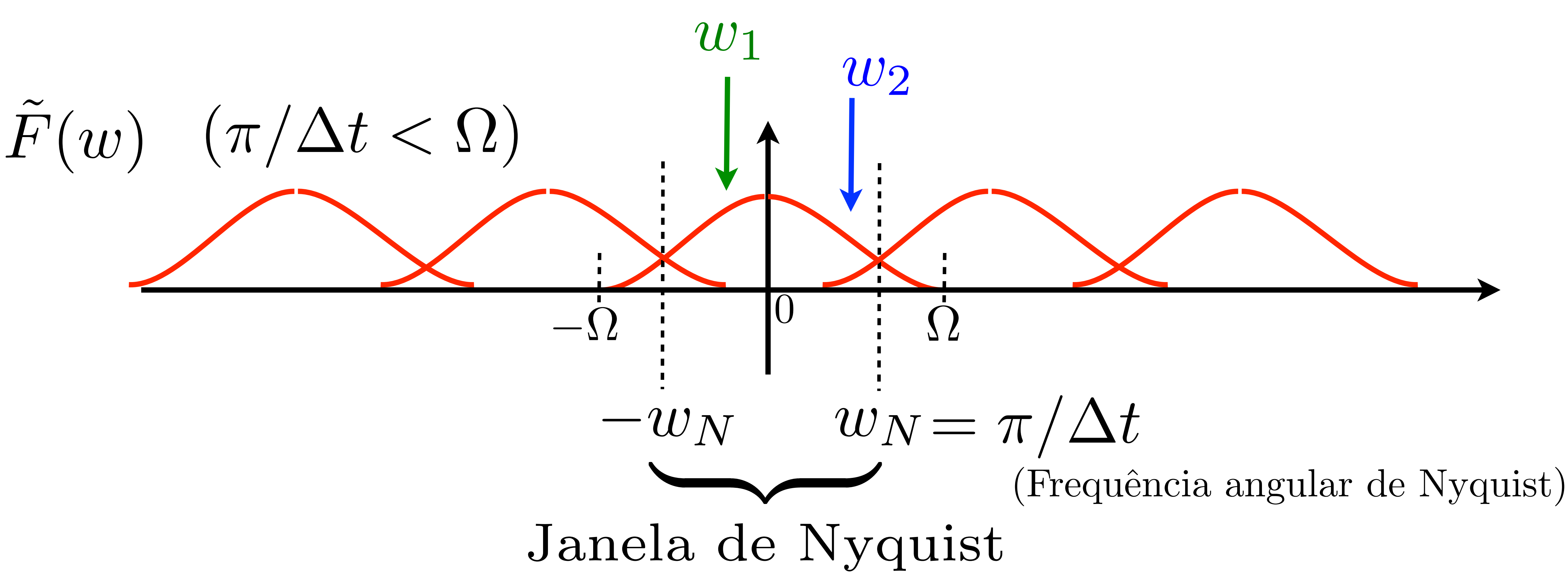
Frequência de Nyquist

Podemos definir a frequência de Nyquist ν_N de um sinal discreto como sendo a maior frequência que pode ser corretamente representada no sinal quando o período de amostragem é Δt.

$$\nu_N = 1/2\Delta t \qquad w_N = \pi/\Delta t$$

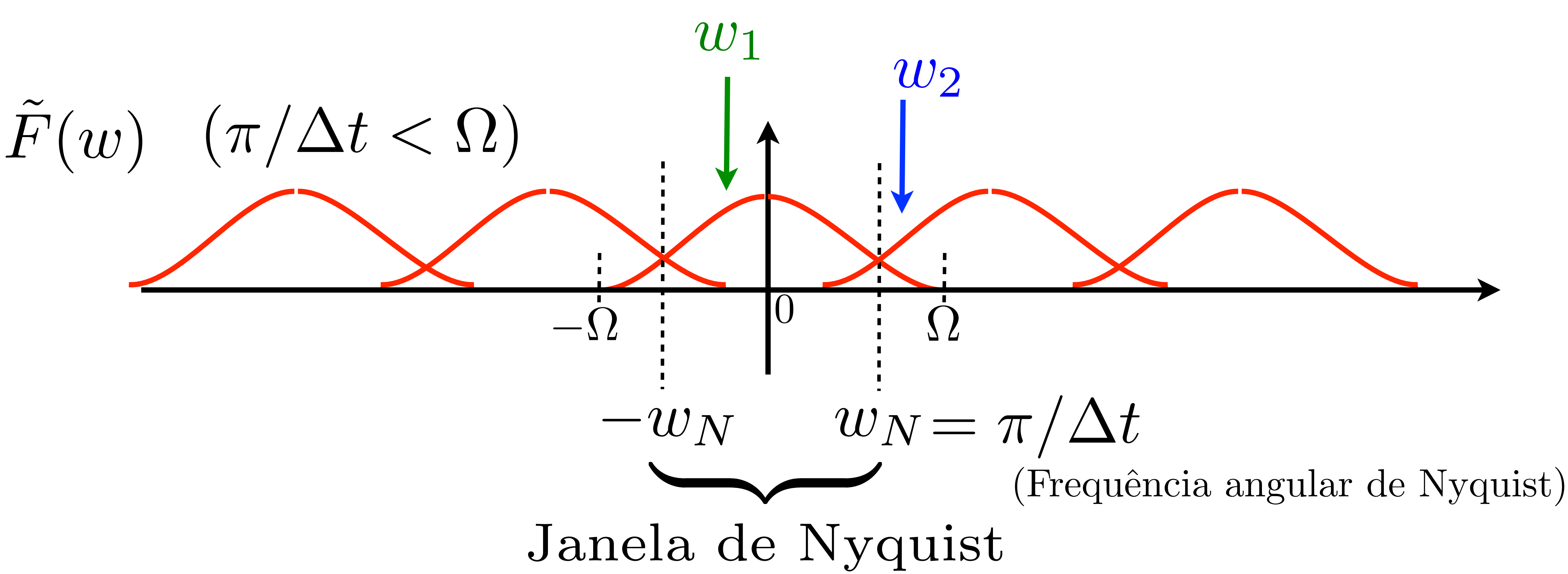
Aliasing e espectro

Quaisquer w_1 e w_2 dentro da janela de Nyquist nunca são aliases. Isto significa que a transformada de Fourier discreta identifica todas as componentes espectrais dentro da janela de Nyquist.

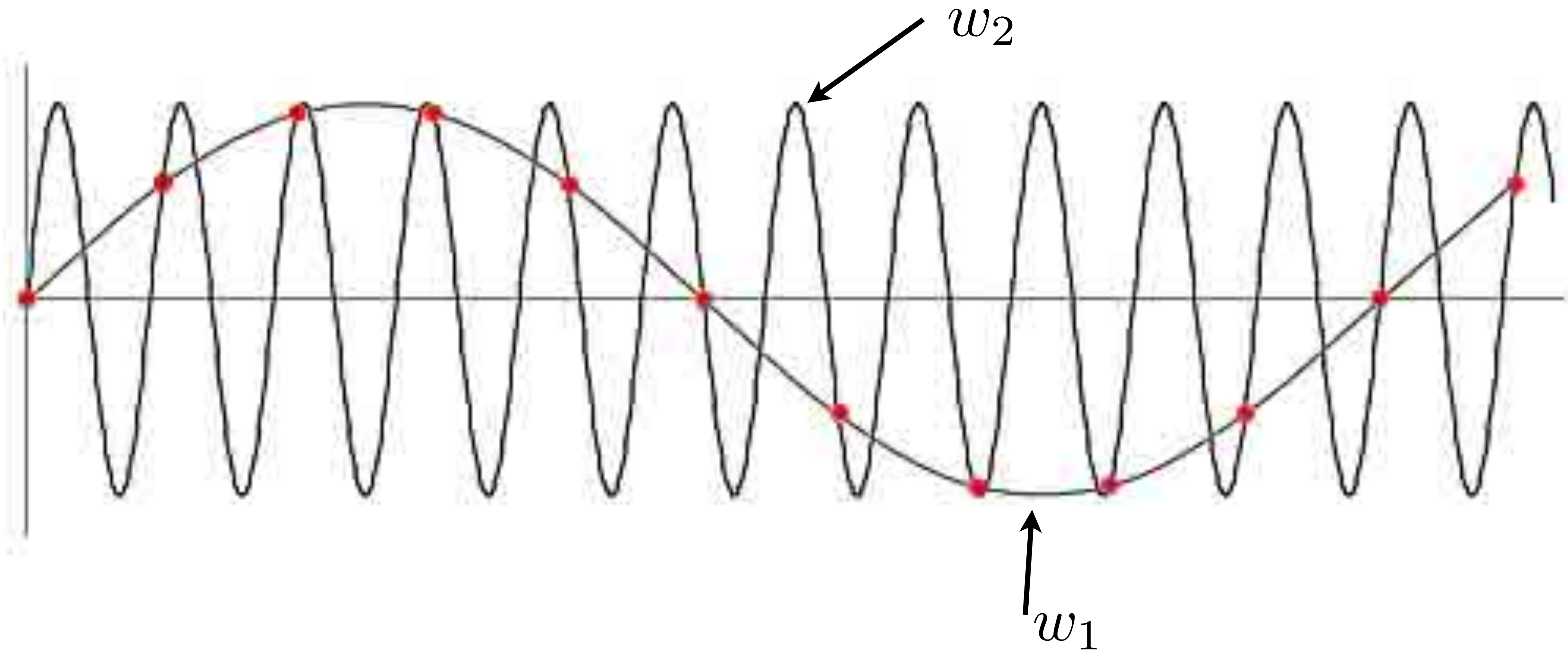


Aliasing e espectro

Por outro lado, para todo w_2 fora da janela de Nyquist existe um alias dentro da janela



Aliasing e espectro



Aplicação da Transformada de Fourier a dados experimentais

A transformada de Fourier discreta de $f(t)$, $\tilde{f}(t)$, é

$$\tilde{F}(w) = \frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k e^{-iwk\Delta t}$$

onde $f_k = f(k\Delta t)$, $\quad -w_N < w < w_N$

Considerando que dados experimentais são sempre discretos, os mesmos podem ser interpretados como amostras de um processo contínuo subjacente. Porém, os dados, além de serem discretos são finitos em quantidade.

Aplicação da Transformada de Fourier a dados experimentais

O procedimento empregado consiste em definir todas as amostras fora da janela de dados como sendo nulas.

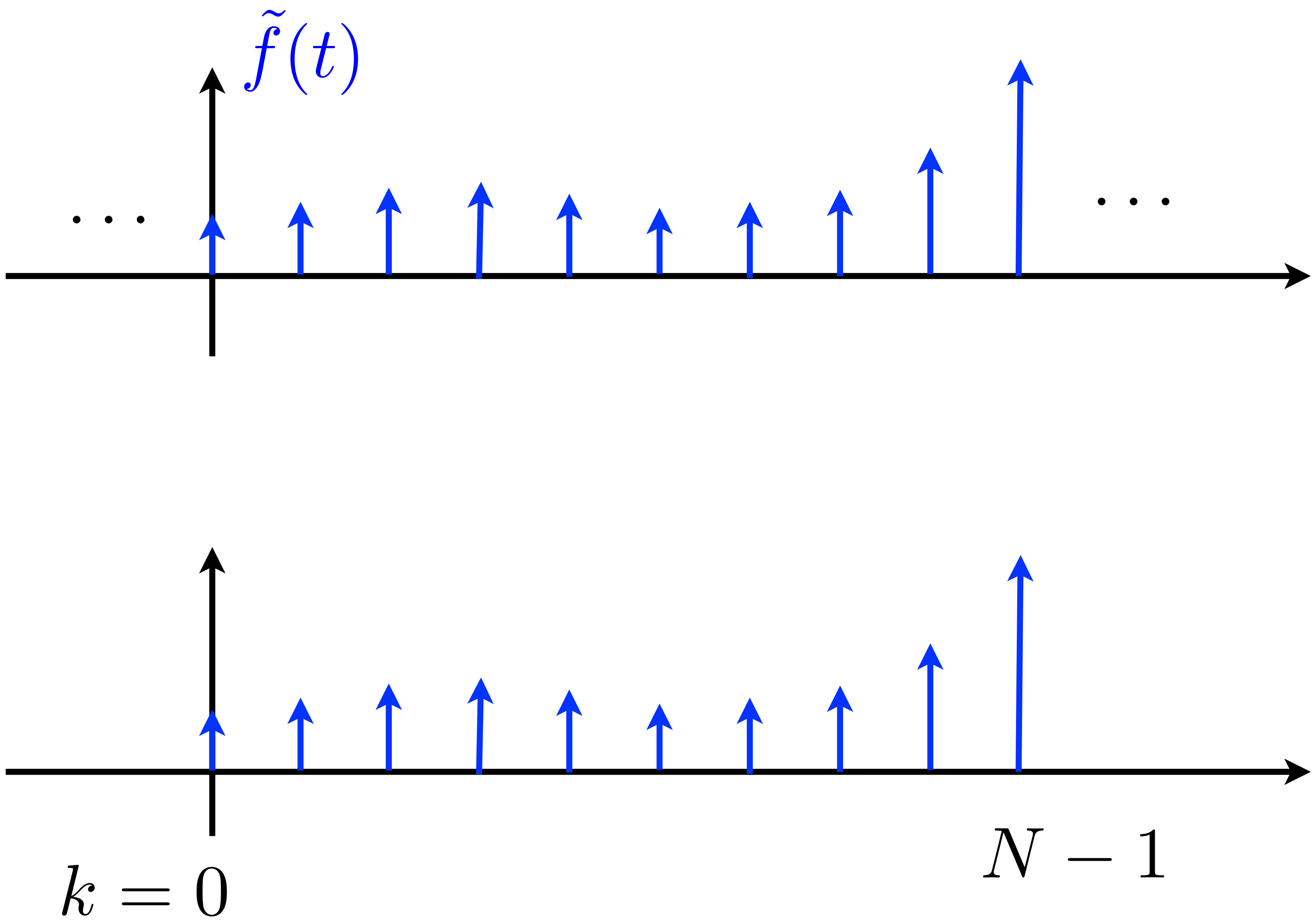
$$f_k = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -\infty < k \leq -1 \\ f_k \text{ (dados)} & \text{se} \quad 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{se} \quad N \leq k < \infty \end{cases}$$

Então, pode-se aplicar a transformada de Fourier discreta como

$$\tilde{F}(w) = \frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-iwk\Delta t}$$

(Transformada de Fourier Discreta)
ou
(DFT: *Discrete Fourier Transform*)

Aplicação da Transformada de Fourier a dados experimentais

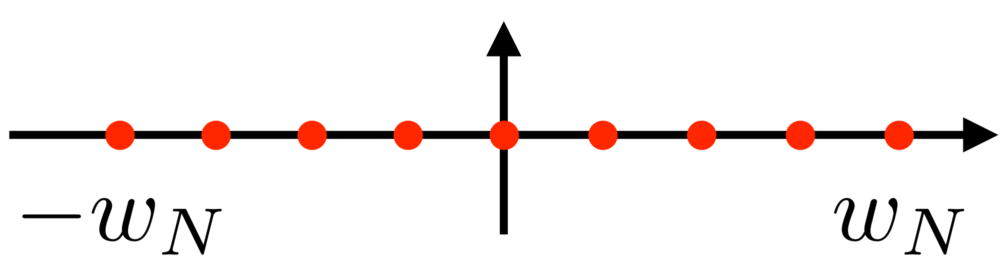


Aplicação da Transformada de Fourier a dados experimentais

Apesar de f_k ser discreta em t, a sua transformada de Fourier é contínua dentro da janela de Nyquist.
Assim há infinitos valores de $\tilde{F}(w)$ entre $-w_N < w < w_N$.

Para conhecer a DFT seria preciso calcular $\tilde{F}(w)$ para todo w dentro da janela de Nyquist.

No entanto, pode-se mostrar que é possível obter toda a informação sobre $\tilde{F}(w)$ com base em um conjunto discreto e finito de w.



Transformada de Fourier Discreta

$$\tilde{F}(w) = \frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-iwk\Delta t}$$

Escrevendo-se a DFT em termos da variável $z = e^{-iw\Delta t}$

$$\tilde{F}(w) = \frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k z^k$$

$$z = e^{-iwk\Delta t}$$

Assim a DFT é um polinômio de grau $N-1$ em z.

$$\tilde{F}(w) = \frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} \left[f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \cdots f_{N-1} z^{N-1}\right]$$

Propriedade dos polinômios

Teorema fundamental da álgebra

Todo polinômio de grau n é equivalente ao conjunto de valores que o mesmo assume sobre $n+1$ pontos de seu domínio:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

Com $P(x_0),\ P(x_1), \cdots,\ P(x_n)$ há n incógnitas (os coeficientes a) e n equações (os $P(x)$) e, portanto, é possível resolver o sistema, ou seja, conhecer o polinômio.

Definição dos pontos em w

A maneira mais conveniente de definir os pontos $w_0, w_1, \cdots, w_{n-1}$ é na forma de uma distribuição equi-espaçada em w.

$$w_k = k\Delta w \qquad \Delta w = \frac{2w_N}{n} \qquad \Delta w = \frac{2\pi}{n\Delta t}$$

$$F(w_j) = \frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-ik\Delta t w_j} \qquad w_j = j\Delta w = j\frac{2\pi}{n\Delta t}$$

$$F_j = \frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-i\frac{2\pi}{n}kj} \qquad j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

DFT direta e inversa

Transformada direta

$$F_j = \frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-i\frac{2\pi}{n}kj}$$

$$\boxed{F_j = \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-i\frac{2\pi}{n}kj}}$$

Transformada inversa

$$f_j = \frac{\sqrt{2\pi}}{n\Delta t} \sum_{k=0}^{n-1} F_k e^{+i\frac{2\pi}{n}kj}$$

$$\boxed{f_j = \frac{1}{n\Delta t} \sum_{k=0}^{n-1} F_k e^{+i\frac{2\pi}{n}kj}}$$

Complexidade computacional da DFT

Tanto para a DFT direta e inversa, para n valores, temos n produtos e n somas para cada valor (n^2 multiplicações e n^2 somas).

$$F_j = \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-i\frac{2\pi}{n}kj}$$

Na prática, quem domina são as operações de multiplicação, então a complexidade da DFT é $O(n^2)$.

Transformada Rápida de Fourier (FFT)

É um algoritmo para o cálculo otimizado da DFT, explorando simetrias no termo complexo $e^{-i\frac{2\pi}{n}kj}$.

Se n é um número composto (ou seja, não primo) n = MxL, então é possível calcular a DFT dos n dados como M DFT's de L dados.

Exemplo:

$$n = 1000 = 40 \times 25$$

DFT (normal) $\quad (1000)^2 = 10^6$ operações

FFT $\quad 40 \times (25)^2 = 25000$ operações

Base da FFT

A eficiência do algoritmo FFT depende do número de fatores de n.

A eficiência máxima é obtida quando n é uma potência de 2

$$n = 2^p$$

Nesse caso o número de operações é $n \log_2 n$

Quando n não é potência de 2, aumenta-se com zeros até atingir uma potência de 2.

O efeito de acrescentar zeros aos dados

$$F_j = \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-ikw\Delta t}$$ (dados) $$\Delta w = \frac{2\pi}{n\Delta t}$$

$$F_j = \Delta t \sum_{k=0}^{n'-1} f_k e^{-ikw\Delta t}$$ (dados + zeros)

$$= \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-ikw\Delta t} + \Delta t \sum_{k=n}^{n-1} \underbrace{f_k}_{0} e^{-ikw\Delta t} \qquad \Delta w' = \frac{2\pi}{n'\Delta t}$$

$$\Delta w' < \Delta w$$

Assim, incluir zeros faz com que o espaçamento na janela de Nyquist seja menor.

Aplicação de operadores

Além da aplicação para a visualização de espectros, outro aspecto importante é a aplicação de diversos operadores no domínio da frequência

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathcal{F}"] & F(w) \arrow[d, "\text{Aplicação do operador } H(w)"] \\ g(t) & G(w) = F(w) \cdot H(w) \arrow[l, "\mathcal{F}^{-1}"'] \end{tikzcd}$$