Oscilações Amortecidas

Oscilações Amortecidas

Dissipação de energia → atrito

Oscilações Amortecidas

Dissipação de energia → atrito

$$\boldsymbol{F} = -b\boldsymbol{v}$$

Oscilações Amortecidas

Dissipação de energia → atrito

$$\boldsymbol{F} = -b\boldsymbol{v} = -b\,\frac{dx}{dt}$$

Oscilações Amortecidas

Dissipação de energia → atrito

$$\boldsymbol{F} = -b\boldsymbol{v} = -b\,\frac{dx}{dt}$$

Diminuição da energia mecânica do Sistema

Oscilações Amortecidas

Dissipação de energia → atrito

$$\boldsymbol{F} = -b\boldsymbol{v} = -b\frac{dx}{dt}$$

Diminuição da energia mecânica do Sistema

MHS:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Oscilações Amortecidas

Dissipação de energia → atrito

$$\boldsymbol{F} = -b\boldsymbol{v} = -b\frac{dx}{dt}$$

Diminuição da energia mecânica do Sistema

MHS + amortecimento

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

Oscilações Amortecidas

Dissipação de energia → atrito

$$\boldsymbol{F} = -b\boldsymbol{v} = -b\frac{dx}{dt}$$

Diminuição da energia mecânica do Sistema

MHS + amortecimento

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Oscilações Amortecidas

Dissipação de energia → atrito

$$\boldsymbol{F} = -b\boldsymbol{v} = -b\frac{dx}{dt}$$

Diminuição da energia mecânica do Sistema

MHS + amortecimento

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Oscilações Amortecidas

Dissipação de energia → atrito

$$\boldsymbol{F} = -b\boldsymbol{v} = -b\frac{dx}{dt}$$

Diminuição da energia mecânica do Sistema

MHS + amortecimento

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Como resolver essa equação?

Oscilações Amortecidas

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Oscilações Amortecidas

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x = A_0 e^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t} \cos(\omega' t + \delta)$$

Oscilações Amortecidas

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x = \underbrace{A_0}_{\text{Amplitude máxima}} e^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t}\cos(\omega' t + \delta)$$

Oscilações Amortecidas

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x = A_0 e^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t}\cos(\omega' t + \delta)$$

τ→m/b

Amplitude máxima

Oscilações Amortecidas

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x = A_0 e^{-\left(\frac{t}{2\tau}\right)} \cos(\omega' t + \delta)$$

Amplitude máxima

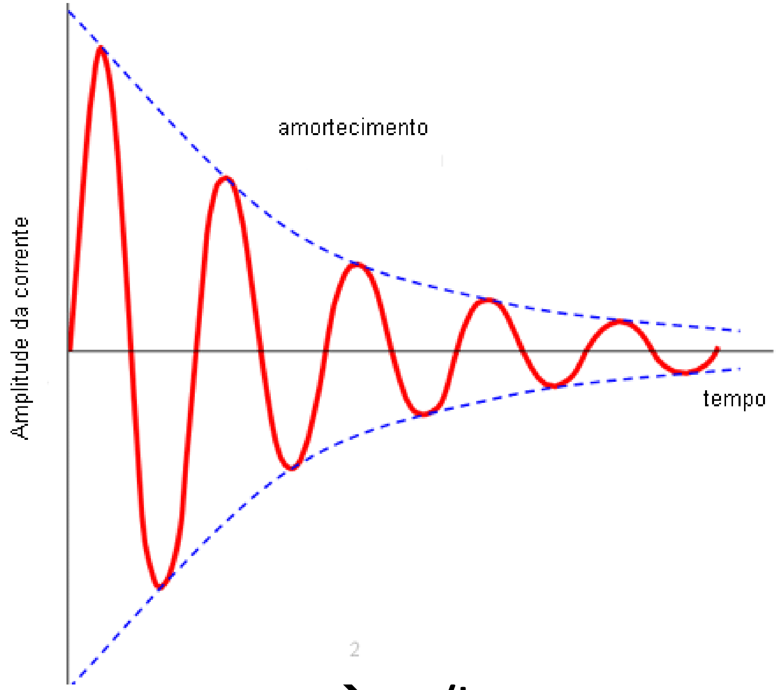
Frequência do movimento

$\tau \rightarrow m/b$

Constante de tempo

Oscilações Amortecidas

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$



$$x = A_0 e^{-\left(\frac{t}{2\tau}\right)} \cos(\omega' t + \delta)$$

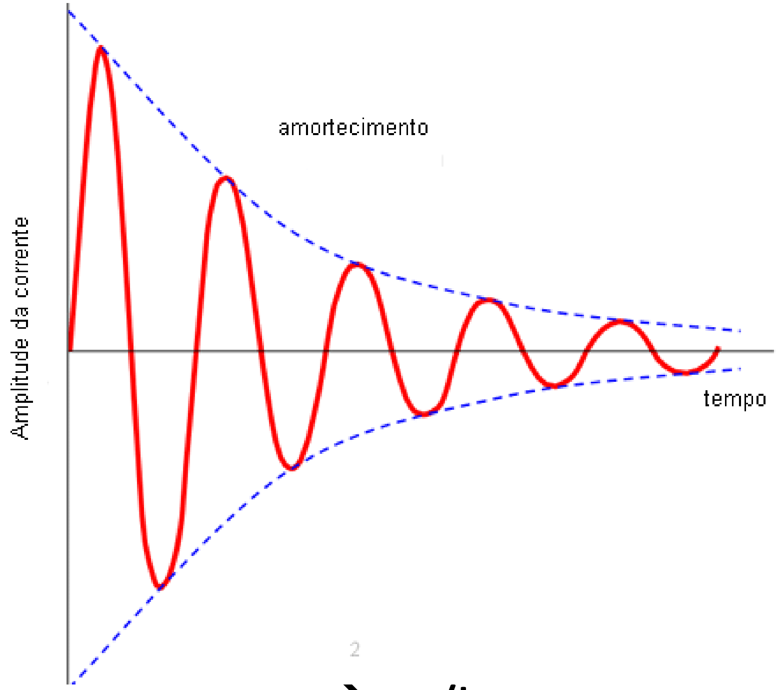
τ→m/b

Constante de tempo

Amplitude máxima

Frequência do movimento

Oscilações Amortecidas



$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x = A_0 e^{-\left(\frac{t}{2\tau}\right)} \cos(\omega' t + \delta)$$

$\tau \rightarrow m/b$

Constante de tempo

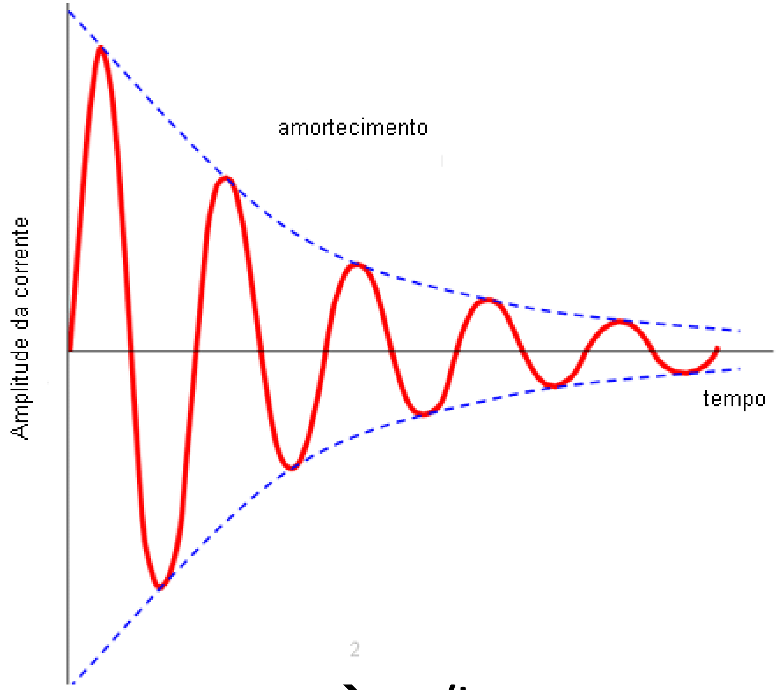
Amplitude máxima

Frequência do movimento

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - (b/2m\omega_0)^2}$$

Oscilações Amortecidas

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$



$$x = A_0 e^{-\left(\frac{t}{2\tau}\right)} \cos(\omega' t + \delta)$$

τ→m/b

Constante de tempo

Amplitude máxima

Frequência do movimento

$$\omega' = \omega_0\sqrt{1 - (b/2m\omega_0)^2}$$

Frequência angular sem amortecimento

Oscilações Amortecidas

$$\omega' = \omega_0\sqrt{1 - (b/2m\omega_0)^2}$$

Oscilações Amortecidas

$$\omega' = \omega_0\sqrt{1 - (b/2m\omega_0)^2}$$

$$b \ll 2m\omega_0 \rightarrow \qquad \omega' \approx \omega_0$$

Oscilações Amortecidas

$$\omega' = \omega_0\sqrt{1-(b/2m\omega_0)^2}$$

$b \ll 2m\omega_0 \rightarrow \quad \omega' \approx \omega_0$

$b = 2m\omega_0 \rightarrow \quad \omega' = 0 \ \rightarrow n\tilde{a}o\ oscila$

$b > 2m\omega_0 \rightarrow \quad \sqrt{negativo}$

Oscilações Amortecidas

$$\omega' = \omega_0\sqrt{1-(b/2m\omega_0)^2}$$

$b \ll 2m\omega_0 \rightarrow \quad \omega' \approx \omega_0 \longrightarrow$ Subamortecido

$b = 2m\omega_0 \rightarrow \quad \omega' = 0 \ \rightarrow não\ oscila \longrightarrow$ Criticamente amortecido

$b > 2m\omega_0 \rightarrow \quad \sqrt{negativo} \longrightarrow$ Superamortecido

Oscilações Amortecidas

$$\omega' = \omega_0\sqrt{1-(b/2m\omega_0)^2} \qquad \omega' = \omega_0\sqrt{1-(1/2Q)^2}$$

$b \ll 2m\omega_0 \rightarrow \quad \omega' \approx \omega_0 \longrightarrow$ Subamortecido

$b = 2m\omega_0 \rightarrow \quad \omega' = 0 \rightarrow não\ oscila \longrightarrow$ Criticamente amortecido

$b > 2m\omega_0 \rightarrow \quad \sqrt{negativo} \longrightarrow$ Superamortecido

Oscilações Amortecidas

$$Q = \omega_0 \tau = \frac{\omega_0 m}{b}$$ Fator de qualidade

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - (b/2m\omega_0)^2}$$

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - (1/2Q)^2}$$

$b \ll 2m\omega_0 \rightarrow \quad \omega' \approx \omega_0 \longrightarrow$ Subamortecido

$b = 2m\omega_0 \rightarrow \quad \omega' = 0 \rightarrow não\ oscila \longrightarrow$ Criticamente amortecido

$b > 2m\omega_0 \rightarrow \quad \sqrt{negativo} \longrightarrow$ Superamortecido

Oscilações Amortecidas

$$Q = \omega_0 \tau = \frac{\omega_0 m}{b}$$ Fator de qualidade

Invers. proporcional a perda relativa de Energia

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - (b/2m\omega_0)^2} \qquad \omega' = \omega_0 \sqrt{1 - (1/2Q)^2}$$

$b \ll 2m\omega_0 \rightarrow \quad \omega' \approx \omega_0$ → Subamortecido

$b = 2m\omega_0 \rightarrow \quad \omega' = 0 \ \rightarrow não\ oscila$ → Criticamente amortecido

$b > 2m\omega_0 \rightarrow \quad \sqrt{negativo}$ → Superamortecido

Oscilações Forçadas

Oscilações **Forçadas**

Oscilações <u>**Forçadas**</u>

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x \neq 0$$

Oscilações **Forçadas**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x \neq 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F_0 e^{i\omega t}$$

Oscilações **Forçadas**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x \neq 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F_0 e^{i\omega t}$$

Quando $\omega = \omega_0 \rightarrow$ ressonância

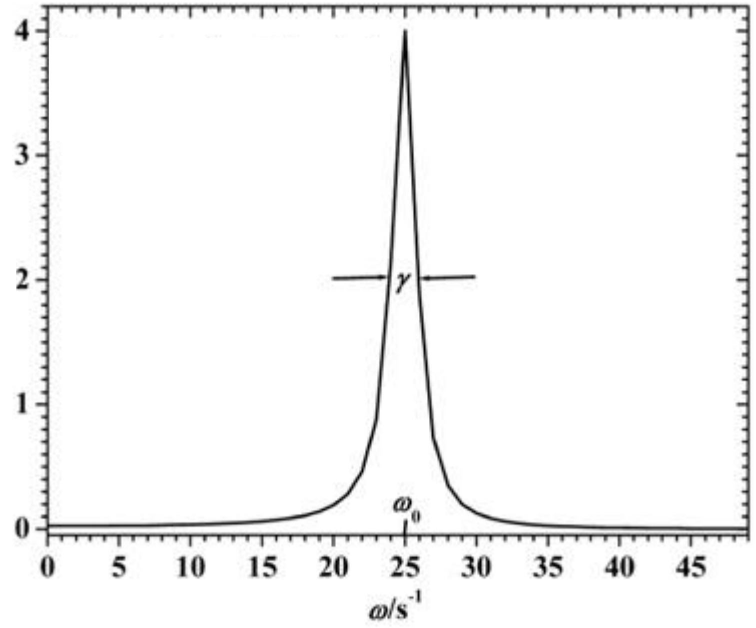
Oscilações **Forçadas**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x \neq 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F_0 e^{i\omega t}$$

Quando ω= ω_0 → ressonância

Potência média

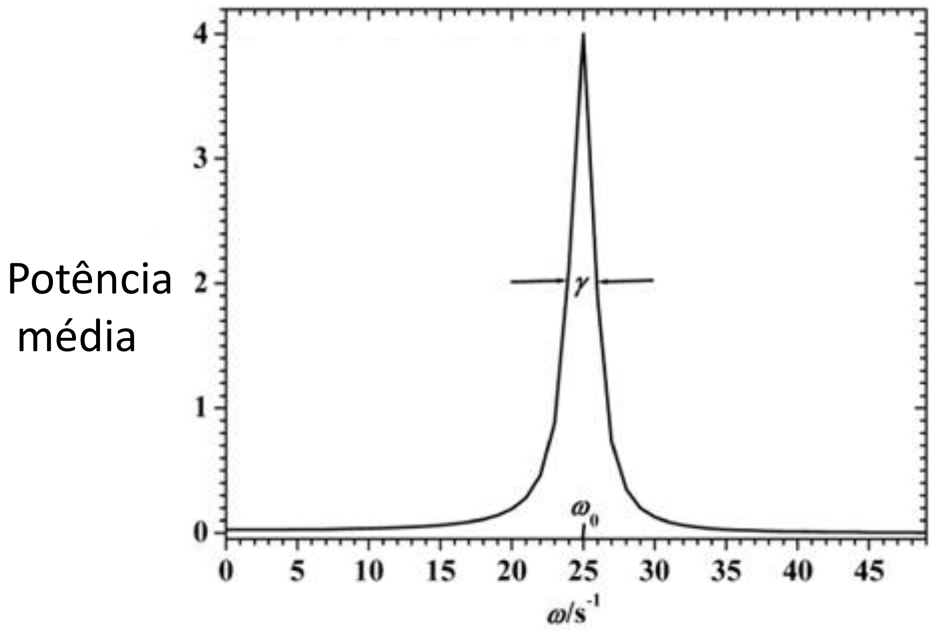


Oscilações Forçadas

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x \neq 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F_0 e^{i\omega t}$$

Quando $\omega = \omega_0 \rightarrow$ ressonância



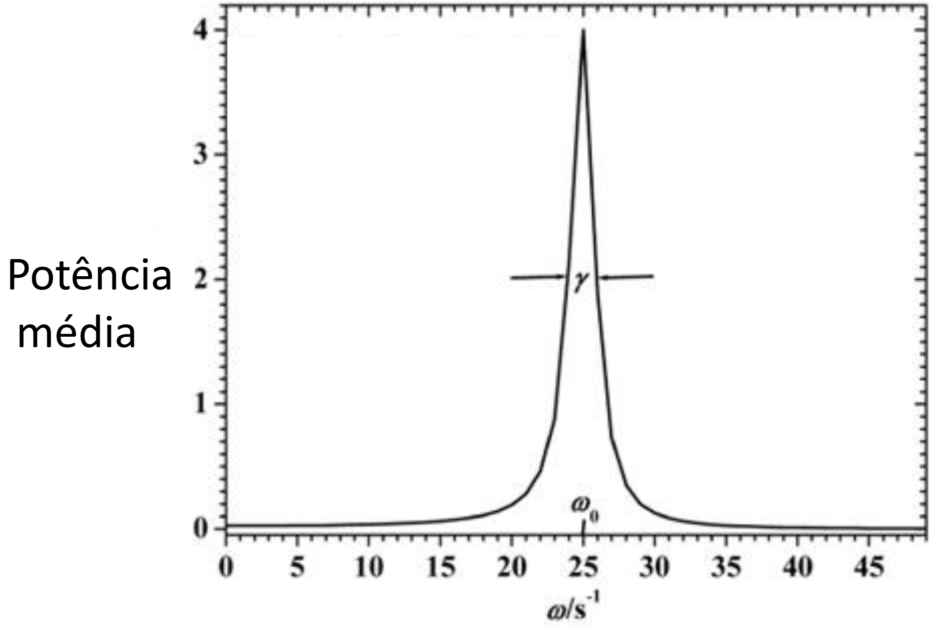
Amortecimento pequeno (Q grande):
Oscilador absorve muita energia da fonte excitadora

Oscilações **Forçadas**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x \neq 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F_0 e^{i\omega t}$$

Quando $\omega = \omega_0$ → ressonância



Amortecimento pequeno (Q grande):
Oscilador absorve muita energia da fonte excitadora

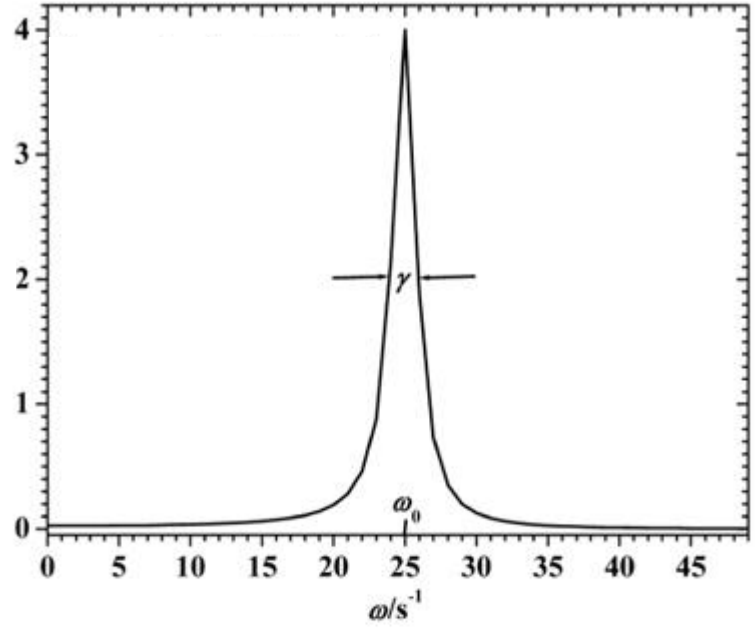
Amortecimento grande (Q peq):
Curva é mais larga (y>>)

Oscilações **Forçadas**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x \neq 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F_0 e^{i\omega t}$$

Quando $\omega = \omega_0$ → ressonância



Amortecimento pequeno (Q grande):
Oscilador absorve muita energia da fonte excitadora

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{Q}$$

Fator Q

$$Q = \omega_0 \tau = \frac{\omega_0 m}{b}$$ Fator de qualidade

Invers. proporcional a perda relativa de Energia

Fator Q

$$Q = \omega_0 \tau = \frac{\omega_0 m}{b}$$ Fator de qualidade

Invers. proporcional a perda relativa de Energia

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$$

Fator Q

$$Q = \omega_0 \tau = \frac{\omega_0 m}{b}$$ Fator de qualidade

Invers. proporcional a perda relativa de Energia

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$$

Um corpo está oscilando preso a uma mola e perde 3% da sua energia em cada ciclo.

Fator Q

$$Q = \omega_0 \tau = \frac{\omega_0 m}{b}$$ Fator de qualidade

Invers. proporcional a perda relativa de Energia

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$$

Um corpo está oscilando preso a uma mola e perde 3% da sua energia em cada ciclo.

$$\frac{E}{\Delta E} = \frac{100}{3}$$

Fator Q

$$Q = \omega_0 \tau = \frac{\omega_0 m}{b}$$ Fator de qualidade

Invers. proporcional a perda relativa de Energia

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$$

Um corpo está oscilando preso a uma mola e perde 3% da sua energia em cada ciclo.

$$\frac{E}{\Delta E} = \frac{100}{3}$$

Análise Matemática

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F_0 e^{i\omega t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F_0 \cos(\omega t)$$

Solução transiente: depende das condições iniciais

Solução permanente: depois de um longo tempo

Análise Matemática

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F_0 e^{i\omega t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F_0 \cos(\omega t)$$

Solução transiente: depende das condições iniciais

Solução permanente: depois de um longo tempo

Análise Matemática

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F_0 e^{i\omega t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F_0 \cos(\omega t)$$

Solução transiente: depende das condições iniciais $x = A_0 e^{-\left(\frac{t}{2\tau}\right)} \cos(\omega' t + \delta)$

Solução permanente: depois de um longo tempo

Análise Matemática

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F_0 e^{i\omega t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F_0 \cos(\omega t)$$

Solução transiente: depende das condições iniciais $x = A_0 e^{-\left(\frac{t}{2\tau}\right)} \cos(\omega' t + \delta)$

Solução permanente: depois de um longo tempo $x = Acos(\omega t + \delta)$

Análise Matemática

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F_0 e^{i\omega t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F_0 \cos(\omega t)$$

Solução transiente: depende das condições iniciais $x = A_0 e^{-\left(\frac{t}{2\tau}\right)} \cos(\omega' t + \delta)$

Solução permanente: depois de um longo tempo $x = A cos(\omega t + \delta)$

Essa diferença de fase tende a sumir com o passar do tempo

Análise Matemática

Solução permanente: depois de um longo tempo

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F_0\cos(\omega t)$$

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

Análise Matemática

Solução permanente: depois de um longo tempo

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F_0\cos(\omega t)$$

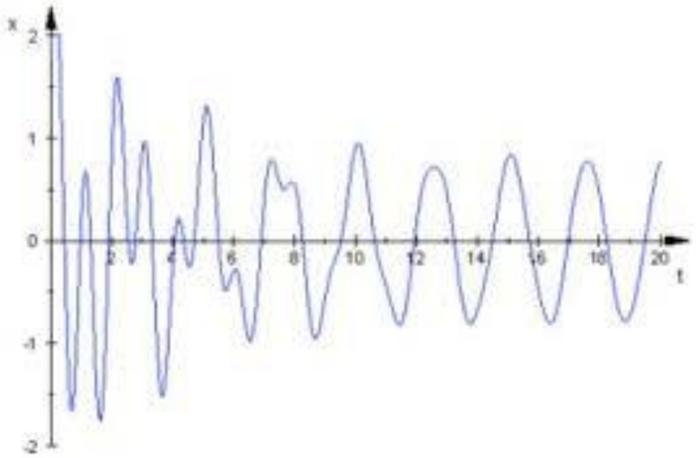
$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

$$tg\delta = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Análise Matemática

Solução permanente: depois de um longo tempo



$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F_0\cos(\omega t)$$

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

$$tg\delta = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$