DAS PORCENTAGENS AOS LOGARITMOS

José Jakubovic

1. Introdução

As porcentagens, como é notório, têm grande importância prática. Além disso, trata-se de um assunto bastante simples, do ponto de vista matemático. No entanto, as porcentagens têm sido apresentadas de modo incompleto, quase sempre se limitando a aplicações da "regra de três" e, em geral, sendo vistas como um capítulo à parte, que pouco ou nenhum relacionamento tem com os demais capítulos da Matemática.

Neste artigo abordaremos, inicialmente, alguns aspectos das porcentagens que, embora elementares, têm sido negligenciados no ensino da Matemática; posteriormente, partiremos de problemas simples de porcentagem para chegar ao estudo das progressões geométricas, das funções exponenciais e dos logaritmos. Utilizando as porcentagens na ocasião de apresentar as progressões geométricas, usando ambas ao fazer a introdução das funções exponenciais e empregando todas elas ao estudar os logaritmos, os alunos deverão aumentar seu nível de compreensão sobre tais temas, pois estarão trabalhando com os mesmos continuamente. Cabe realçar ainda que não teremos, aqui, a preocupação de estruturar um curso completo sobre tais temas: apenas trataremos de alguns pontos, dignos de nota, que, a nosso ver, não têm recebido a atenção que merecem.

2. Uma revisão de porcentagens

Através da resolução de problemas envolvendo porcentagens, podemos chegar, de modo bastante natural, às progressões geométricas. Por isso, caso este enfoque seja adotado, talvez valha a pena revisar rapidamente o item de porcentagens antes de iniciarmos o curso de seqüências.

Nessa revisão, um ponto a destacar é o significado do símbolo %: x% nada mais é que x/100. Assim, o aluno deve ter sempre em mente, por exemplo, que 21% = 0,21 enquanto que 21% ≠ 21. No sentido de verificar se os alunos conhecem o significado do símbolo %, podemos propor-lhes o seguinte teste, que constou do vestibular da FUVEST-78.

Teste 1

$(10\%)^2 =$

a) 100% b) 20% c) 5% d) 1% e) 0,1%

Vejamos a solução do mesmo:

$(10\%)^2 = (10/100)^2 = (1/10)^2 = 1/100 = 1\%$

Naquele vestibular, com cerca de 100.000 participantes, apenas 31% dos alunos assinalaram a alternativa correta. Este fato vem comprovar que a maioria dos alunos em vias de ingressar numa faculdade desconhece o significado do símbolo %. Com relação ao teste anterior, podemos ainda comentar com os alunos que $(10\%)^2$ é 10% de 10%, ou seja 1/10 de 1/10 (a décima parte da décima parte), o que resulta em 1%.

Mesmo depois de resolvido o teste anterior, os alunos muitas vezes, encontram dificuldades para resolver questões inteiramente análogas, tais como o próximo teste:

Teste 2

$(100\%)^2 =$

a) 10.000% b) 100% c) 10% d) 1% e) 0,01%

Nesta revisão de porcentagens, outro aspecto a destacar é que aumentos porcentuais podem ser dados de modo muito prático, mecânico e de fácil compreensão através de simples multiplicações. A este aspecto nos dedicaremos nos problemas que vêm a seguir.

Problema 1

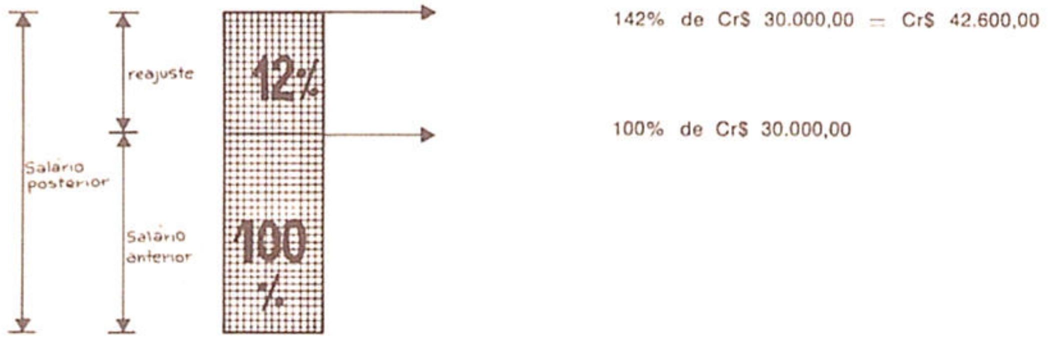
O salário mensal de uma pessoa era de Cr$ 30.000,00, quando sofreu um reajuste de 42%. Qual passou a ser o salário desta pessoa?

Resolução:

O salário, que era de 100% de Cr$ 30.000,00, foi acrescido de 42% de Cr$ 30.000,00, passando a 142% de Cr$ 30.000,00. Portanto, o salário daquela pessoa passou a

142% de Cr$ 30.000,00 = 1,42 × Cr$ 30.000,00 = Cr$ 42.600,00.

Esta resolução pode ser visualizada através do seguinte esquema:



Para que os alunos se familiarizem com este "mecanismo multiplicativo", podemos utilizar alguns exercícios de preenchimento de lacunas, tais como:

Problema 2

Preencha a lacuna da frase seguinte:

Para se obter o preço de uma mercadoria após o mesmo ter sofrido um aumento de 15%, deve-se multiplicar seu preço anterior por..........

A situação relativa a descontos porcentuais, em termos matemáticos, é inteiramente análoga à dos aumentos — inclusive no que se refere ao esquema visual ali utilizado — e, por isso, pode ser solucionado pelos alunos sem grande auxílio do professor. Para colocar os alunos diante desta "nova" situação, podemos propor problemas como:

Problema 3

Preencha a lacuna da frase seguinte:

Para se obter o preço de uma mercadoria após o mesmo ter sofrido um desconto de 15%, deve-se multiplicar seu preço anterior por..........

Finalmente, outra situação muito freqüente em nossa vida cotidiana e que merece ser incluída nesta revisão é aquela relativa a sucessivos aumentos (ou descontos) porcentuais. Num primeiro instante, é comum os alunos estranharem o fato de, por exemplo, dois aumentos sucessivos de 20% não resultarem no mesmo valor que se obtém com um único aumento de 40%. Este estudo pode ser feito através de problemas tais como:

Problema 4

Um objeto custava Cr$ 1.600,00 quando seu preço teve um aumento de 25%. Posteriormente, este novo preço sofreu um aumento de 32%. Assim sendo, para obter o preço deste objeto imediatamente após o aumento de 25%, deve-se multiplicar Cr$ 1.600,00 por...... ; e para obter seu preço após o aumento de 32%, deve-se multiplicar Cr$ 1.600,00 por .... Esta última multiplicação nos mostra que o preço "final" deste objeto pode ser obtido do preço "inicial" através de um único aumento de..........%.

(No problema em questão é importante que os alunos analisem os motivos que fazem com o índice percentual do aumento único seja superior à soma dos outros dois).

Problema 5

Segundo dados retirados da revista Veja, de 1973 a 1978, a frota brasileira de veículos teve um crescimento de 75%. Por outro lado, nesse mesmo período cada veículo reduziu seu consumo de gasolina, em média, em 40%. Pergunta-se: o total de gasolina consumido (pelos veículos) no Brasil em 1978 superou ou foi inferior ao consumo de 1973? Em quantos por cento?

3. Progressões geométricas

As progressões geométricas podem ser abordadas de inúmeras maneiras. Uma possibilidade consiste em trabalhar inicialmente com seqüências, como, por exemplo, a seqüência dada por $a_n = n^2$, $n \in N^*$. Depois as progressões aritméticas e geométricas serão vistas como seqüências que possuem certas particularidades. Assim, a seqüência definida por $a_n = 5n + 3$, $n \in N^*$, será uma P.A. de razão 5, pois satisfaz a $a_{n+1} = a_n + 5$ para todo $n \in N^*$, enquanto a seqüência dada pela fórmula de recorrência $a_1 = 7$ e $a_{n+1} = 2 . a_n$, $n \in N^*$, será uma P.G. de razão 2.

É interessante inclusive que, dentro das possibilidades, se apresente aos alunos mais de uma abordagem às progressões geométricas. Aqui, no entanto, centraremos nossa atenção num único enfoque, feito a partir de problemas envolvendo porcentagens, como os que veremos algumas linhas adiante. Esses problemas podem ser úteis para exemplificar, motivar e introduzir as progressões geométricas, relacionando-as com fenômenos onde ocorrem taxas fixas de crescimento porcentual.

Problema 6

Um país possui, atualmente, 100 milhões de habitantes. Se sua população tiver um crescimento anual de 3%, qual será sua população daqui a 1, 2, 3 e 4 anos?

Resolução:

Pelo "mecanismo multiplicativo" anteriormente mencionado, temos que:

população atual = 100.000.000
população dentro de 1 ano = 100.000.000 × 1,03 = 103.000.000
população dentro de 2 anos = 103.000.000 × 1,03 = 106.090.000
população dentro de 3 anos = 106.090.000 × 1,03 = 109.272.700
população dentro de 4 anos = 109.272.700 × 1,03 = 112.550.881

Resolvido o problema, obtivemos uma seqüência em que "cada termo multiplicado por 1,03 resulta no termo a ele consecutivo", ocasião em que a definição de P.G. poderá surgir com bastante naturalidade.

Na resolução anterior, os cálculos aritméticos envolvidos devem ficar em plano secundário, podendo ser contornados se permitirmos que os alunos deixem os resultados indicados ou, caso seja possível, que utilizem uma calculadora. Neste último caso, os alunos poderão verificar, a título de exercício, a validade da seguinte tabela, que fornece o tempo necessário para uma população duplicar em função do seu crescimento anual:

Crescimento anual	Tempo para duplicar
1%	70 anos
2%	35 anos
3%	24 anos
4%	17 anos

Assim, se a população de um país é P e se ela cresce 3% ao ano, 24 anos depois ela será de $P \times 1{,}03^{24} \cong P \times 2{,}0$, e já terá duplicado.

Problema 7

Uma bolinha é solta de uma altura de 10m. Depois de cada batida no solo, ela consegue atingir apenas 70% da altura anteriormente alcançada. Que altura a bolinha atingirá após a 1.ª, 2.ª, 3.ª e 4.ª batidas no solo?

(Neste caso teremos uma P.G. decrescente.)

4. Funções exponenciais

Evidentemente, as funções exponenciais podem ser tratadas de diversos modos. Repetimos que, dentro do possível, é interessante abordá-las de mais de uma maneira. No entanto, novamente nos fixaremos num só desses enfoques, em que relacionaremos as porcentagens, as progressões geométricas e as funções exponenciais. Os próximos exemplos e problemas referem-se a situações que poderão motivar ou introduzir o estudo das funções exponenciais.

Exemplo 1

"Em condições ideais, uma célula pode se subdividir em duas outras em um certo intervalo de tempo. As novas células se subdividem novamente após decorrido o mesmo intervalo de tempo, etc... Admitamos que o tempo é medido em unidades que coincidem com o intervalo de tempo necessário para uma divisão celular. Seja **t** o tempo e N o número de células. Então obtemos a seqüência 1, 2, 4, 8, 16, ... ou

$$N = 2^t \quad , \quad t \in \{0,1,2,\ldots\}\text{"}$$

Como vemos, o exemplo anterior — retirado de (1) — sutilmente nos leva à função $N = 2^t$, ocasião em que podemos vir a definir as funções exponenciais. Neste exemplo podemos ainda observar a ocorrência de uma P.G. de razão 2, bem como de uma "população celular" que, em cada intervalo unitário de tempo, cresce 100%. Além disso, é altamente recomendável que os alunos percebam relacionamentos da Matemática com outras Ciências, como a Biologia, a Física, etc.

Problema 8

Sendo de 1 atm a pressão ao nível do mar e sabendo-se que a pressão atmosférica diminui 10% quando passamos de uma altitude para outra situada a 1 km acima, determine:

a) a pressão atmosférica à altitude de 1 km;

b) a pressão atmosférica à altitude de 2 km;

c) a pressão atmosférica **P** na altitude de **h** km.

Resolução:

a) A pressão atmosférica a 1 km de altitude é 90% da pressão atmosférica ao nível do mar, ou seja, $P_1 = 0{,}9 \times 1 = 0{,}9$ atm.

b) A pressão atmosférica a 2 km de altitude é 90% da pressão atmosférica a 1 km de altitude, isto é, $P_2 = 0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}81$ atm.

c) Cada vez que a altitude aumenta de 1 km, a pressão atmosférica cai 10%, sendo que seu valor anterior será, então, multiplicado por 0,9. Partindo do nível do mar, até atingir a altitude de **h km,** vemos que a pressão atmosférica inicial de 1 atm. sofrerá **h** multiplicações sucessivas por 0,9. Então, com **P** medido em atm, teremos:

$$P = \underbrace{1 \times 0{,}9 \times 0{,}9 \times \ldots \times 0{,}9}_{h \text{ vezes}}$$

Portanto: $P = 0{,}9^h$

Convém observarmos que o raciocínio até aqui efetuado é válido apenas para $h \in N$, mas, com a suposição adicional de que em intervalos (de altitude) iguais a pressão atmosférica sofre diminuições porcentuais iguais, podemos demonstrar que a relação anterior continua válida para todo **h** real, não negativo.

Antes de prosseguirmos, atentaremos para o fato de que o problema anterior destaca, novamente, relacionamentos entre porcentagens, progressões geométricas e funções exponenciais, bem como entre a Matemática e a Física.

Exemplo 2

São conhecidos diversos tipos de "correntes" onde, por exemplo, cada pessoa deve enviar cartas para cinco conhecidos seus, que, por sua vez, deverão enviar, cada um, cinco cartas, e assim por diante.

Uma corrente "sui generis" possibilita que se adquira um par de sapatos pela quarta parte de seu preço (75% de desconto!). Vejamos o seu funcionamento.

Você só ingressará na corrente se preencher um formulário de alguém que dela já participe. Esse alguém deverá arrumar quatro pessoas interessadas (você e outras três), recolhendo de cada uma a quarta parte do preço do par de sapatos. Juntadas as quatro quartas partes, tal pessoa as envia para a fábrica promovedora da corrente e, assim, receberá o seu par de sapatos (observe que a fábrica recebe o valor integral dos mesmos). Você, por sua vez, tem de arrumar quatro novos participantes que pagarão conjuntamente o sapato que **você** obterá. Cada um desses novos compradores deve arrumar quatro novíssimos participantes que lhes pagarão os sapatos, e assim por diante.

Suponhamos que a fábrica tenha distribuído, inicialmente, formulários a 200 pessoas que deflagrarão a corrente. Suponhamos ainda que cada participante leve três dias para vender seus quatro pares de sapatos. Então, em três dias, 800 novos participantes estarão vendendo sapatos e, três dias depois, haverá 3.200 novos vendedores. Esquematicamente temos:

início : 200 participantes;

após 3 dias: $200 \times 4 = 800$ novos participantes;

após 6 dias (2 períodos de 3 dias):

$200 \times 4 \times 4 = 3.200$ novos participantes;

após 9 dias (3 períodos de 3 dias):

$200 \times 4 \times 4 \times 4 = 12.800$ novos participantes.

Após 3t dias (t períodos de 3 dias), o número N de novos participantes será:

$$N = 200 \times \underbrace{4 \times 4 \times \ldots \times 4}_{t \text{ vezes}}$$

ou seja: $N = 200 \times 4^t$

A função exponencial anterior nos mostra que, um mês depois de iniciada a corrente, teremos:

$$N = 200 \times 4^{10} = 209.715.200$$

Este número — onde não estão computados aqueles que participaram da corrente **durante** o primeiro mês (para incluí-los basta considerar a soma dos termos de uma P.G.) — mostra a impossibilidade de funcionamento da corrente, fazendo com que muitas pessoas não consigam vender os quatro pares de sapatos, apesar dos 75% de desconto. Forma-se, assim, um enorme contingente de infringentes do regulamento da corrente que não receberão seus sapatos, tendo apenas contribuído para a compra do sapato alheio. Por este motivo, as correntes desse tipo constituem crime contra a economia popular, previsto em lei — o que, pelo visto, não as tem impedido de proliferar.

Problema 9

Um capital de Cr$ 500.000,00 foi emprestado a juros compostos de 45% ao ano. Determine o montante M em função da duração **t**, em anos, do empréstimo.

5. Logaritmos

5.1 Problemas introdutórios

É importante que problemas análogos aos que seguem, sejam apresentados antes de definirmos logaritmos, pois suas resoluções apontam claramente para as necessidades de criação e estudo dos mesmos.

Problema 10

Um país possui, hoje, 100 milhões de habitantes. Se sua população tiver um crescimento anual de 3%, dentro de quanto tempo esses país possuirá 300 milhões de habitantes?

Resolução:

Como a população cresce 3% ao ano, daqui a **t** anos ela será igual a:

$P = 100.000.000 \times 1{,}03^t$

Para que esse país possua 300 milhões de habitantes, deve-se ter:

$100.000.000 \times 1{,}03^t = 300.000.000 \rightarrow 1{,}03^t = 3$

Neste ponto, onde precisamos encontrar "o expoente ao qual se deve elevar 1,03 para obter resultado igual a 3", temos uma excelente oportunidade para definir logaritmos. Podemos, inclusive, imaginar a seguinte situação: uma pessoa, munida de uma calculadora, pretende resolver a equação $1{,}03^t = 3$. Que teclas ela deverá apertar? Feita essa introdução, não há mal nenhum em interrompermos a resolução do problema para retomá-la, em ocasião propícia, durante o estudo dos logaritmos.

Problema 11

Em lagos e no mar, a vida vegetal somente pode existir na camada mais superficial, já que a luz solar é gradualmente absorvida pela água. Considere um feixe de luz vertical entrando na água com intensidade original I_0. Se a intensidade da luz em função da profundidade **h**, em metros é dada por:

$$I = I_0 \,.\, 0{,}25^h$$

pergunta-se:

a) ao passar de uma profundidade para outra situada a 1m abaixo, qual a diminuição porcentual da intensidade da luz?

b) em que profundidade a intensidade da luz será de apenas 1% da intensidade com que ingressou na água?

Resolução:

a) Quando a profundidade é de **h** metros, a intensidade da luz é:

$I_h = I_0 . 0{,}25^h$; e quando a profundidade aumenta 1m, a intensidade passa a: $I_{h+1} = I_0 . 0{,}25^{h+1}$.

profundidade	intensidade
luz incidente	
0 m	100%
1 m	25%
2 m	6%
3 m	1,5%
4 m	0,4%
5 m	0,1%
6 m	0,02%

Temos:

$$I_{h+1} = I_0 . 0{,}25^{h+1} = I_0 . 0{,}25^h . 0{,}25$$
$$= I_h . 0{,}25 = 25\% \text{ de } I_h.$$

$I_{h+1} = 25\%$ de I_h, então, quando a profundidade aumenta 1m, a intensidade da luz diminui 75%.

b) Desejamos que $I = 0{,}01 . I_0$. Substituindo esse valor na função dada, temos:

$0{,}01 . I_0 = I_0 . 0{,}25^h \rightarrow 0{,}25^h = 0{,}01 \rightarrow (\frac{1}{4})^h = 0{,}01 \rightarrow 4^h = 100.$

Nesse ponto, onde devemos encontrar "o expoente ao qual se deve elevar 4 para obter resultado igual a 100", podemos interromper a resolução, conforme já fizemos no exercício anterior.

(Maiores esclarecimentos sobre este problema podem ser obtidos em (1)).

5.2 Sobre a seqüência do curso de logaritmos

5.2.1 Após a interrupção da resolução de problemas como os anteriores, a definição de logaritmos surge com grande naturalidade. Dada a definição, para que os alunos se habituem com a nomenclatura e simbologia dela advindas, podemos propor-lhes que calculem os valores de

$\log_2 4$, $\log_{10} 100$, $\log_3 (\frac{1}{9})$, $\log_{\frac{1}{25}} \sqrt{125}$, etc.,

infalivelmente presentes a todos os compêndios ao nível do 2.º grau. Feito isso, é importante que os alunos percebam que tais valores foram obtidos sem grandes complicações por se tratarem de casos particulares em que o logaritmando e a base eram facilmente transformados em potências de uma base comum. No entanto, que fazer para calcular $\log_{1,03} 3$ ou $\log_4 100$ que apareceram nos problemas interrompidos?

Vejamos, pois, o método usado por Henry Briggs, em 1617, na construção da primeira tabela de logaritmos decimais.

5.2.1.1 A construção da primeira tabela de logaritmos decimais

A título de exemplificação, mostremos como Briggs determinou o valor de $\log_{10} 2$, através de um laborioso processo de aproximações sucessivas. No que segue é desejável que os alunos se utilizem de máquinas calculadoras para, despreocupando-se com a parte operativa, poderem fixar sua atenção na idéia central do método, entendendo como cada vez mais se "aperta o cerco" em torno do número 2.

Sendo $\log 2 = X$, temos $10^X = 2$. Inicialmente situaremos o número 2 entre duas potências de 10, a_1 e a_2, com expoentes inteiros e sucessivos. Neste caso $a_1 = 1$ e $a_2 = 10$ e então:

$1 < 2 < 10 \rightarrow 10^0 < 10^X < 10^1 \rightarrow 0 < X < 1 \rightarrow 0 < \log 2 < 1$

Esquematicamente, temos:

$a_1 = 1$	2	$a_2 = 10$
10^0	10^X	10^1

Já temos uma primeira aproximação para log 2, pois:

$0 < X < 1 \rightarrow 0 < \log 2 < 1$

Sendo a_3 a média geométrica entre a_1 e a_2 (valores situados nas extremidades do esquema anterior), teremos:

$a_3 = \sqrt{a_1 . a_2} = \sqrt{10} = 3{,}1622776$ e, por outro lado,

$a_3 = \sqrt{10^0 . 10^1} = 10^{\frac{0+1}{2}} = 10^{0,5}$

Localizando o valor de a_3 na figura anterior e desprezando o trecho da mesma que não contém o número 2, teremos:

$a_1 = 1$	2	$a_3 = 3{,}1622776$
10^0	10^X	$10^{0,5}$

Já temos uma aproximação melhor, pois:

$0 < X < 0{,}5 \rightarrow 0 < \log 2 < 0{,}50000$

Estamos, pois, em condições de repetir as operações anteriores, tomando agora a média geométrica de a_1 e a_3. No entanto, faremos uma pausa para notar que, se tivéssemos considerado a_3 como média aritmética de a_1 e a_2, em vez da média geométrica, obteríamos $a_3 = 5{,}5$ mas não teríamos propriedades suficientes para transformar $a_3 = \frac{10^0 + 10^1}{2}$ em uma potência de 10, o que nos impediria de levar o processo adiante. Retomando o cálculo de log 2, faremos $a_4 = \sqrt{a_1 . a_3}$ e então:

$a_4 = \sqrt{a_1 . a_3} = 1{,}7782793$ e, por outro lado

$a_4 = \sqrt{10^0 . 10^{0,5}} = 10^{\frac{0+0,5}{2}} = 10^{0,25}$.

Localizando o valor de a_4 no esquema anterior e desprezando o trecho que não contém o número 2, teremos:

$$a_4 = 1{,}7782793 \qquad 2 \qquad a_3 = 3{,}1622776$$

$$10^{0,25} \qquad 10^{X} \qquad 10^{0,5}$$

Já temos uma aproximação melhor, pois:

$0{,}25 < X < 0{,}5 \rightarrow 0{,}25000 < \log 2 < 0{,}50000$

Sendo $a_5 = \sqrt{a_4 . a_3}$, temos:

$a_5 = \sqrt{a_4 . a_3} = 2{,}3713735$ e, por outro lado,

$$a_5 = \sqrt{10^{0,25} . 10^{0,5}} = 10^{\frac{0,25+0,50}{2}} = 10^{0,375}$$

Com o auxílio de uma **lente de aumento** teremos

$$a_4 = 1{,}7782793 \qquad 2 \qquad a_5 = 2{,}3713735$$

$$10^{0,25} \qquad 10^{X} \qquad 10^{0,375}$$

Portanto $0{,}25 < X < 0{,}375 \rightarrow 0{,}2500 < \log 2 < 0{,}3750$

Sendo $a_6 = \sqrt{a_4 . a_5}$, temos:

$a_6 = \sqrt{a_4 . a_5} = 2{,}0535248$ e, por outro lado,

$$a_6 = \sqrt{10^{0,25} . 10^{0,375}} = 10^{\frac{0,250+0,375}{2}} = 10^{0,3125}$$

Com o auxílio de uma lente de aumento mais potente teremos:

$$a_4 = 1{,}7782793 \qquad 2 \qquad a_6 = 2{,}0535248$$

$$10^{0,25} \qquad 10^{X} \qquad 10^{0,3125}$$

Portanto $0{,}25000 < \log 2 < 0{,}31250$

Com mais quatro passagens chegaremos a:

$$a_{10} = 1{,}9988545 \qquad 2 \qquad a_9 = 2{,}0164143$$

$$10^{0,30078} \qquad 10^{X} \qquad 10^{0,30469}$$

Portanto $0{,}30078 < \log 2 < 0{,}30469$

Já podemos fornecer o valor de log 2 com duas casas decimais: $\log 2 = 0{,}30$.

Com mais nove passagens chegaremos a:

$a_{14} = 1,9999784 \qquad 2 \qquad a_{15} = 2,0000134$

$10^{0,301025} \qquad 10^{x} \qquad 10^{0,301033}$

Se estivéssemos construindo uma tabela de logaritmos com 5 casas decimais, poderíamos, então escrever $\log 2 = 0,30103$ (pois tanto 0,301025 como 0,301033, com aproximação de 5 casas decimais serão dados por 0,30103).

Considerando satisfatória a precisão de 5 casas decimais, daremos por encerrado o cálculo de log 2:

$\log 2 = 0,30103.$

Cumpre lembrarmos, no entanto, que a tabela de Briggs apresentava os logaritmos dos números inteiros de 1 a 1000, calculados com precisão até a 14.ª casa decimal. Porém a grande maioria desses logaritmos foi obtida recorrendo-se a outros anteriormente calculados, como nos mostram os problemas seguintes.

Problema 12

Conhecidos os valores de $\log 2 = 0,30103$ e $\log 3 = 0,47712$, determinar (sem uso de calculadoras):

a) log 4 b) log 5 c) log 6

Resolução:

Sabemos que $2 = 10^{0,30103}$ e $3 = 10^{0,47712}$. Então:

a) $4 = 2^2 = (10^{0,30103})^2$, então $4 = 10^{0,60206}$, ou seja

$\log 4 = 0,60206;$

b) $5 = \dfrac{10}{2} = \dfrac{10^1}{10^{0,30103}} = 10^{1-0,30103}$, então $5 = 10^{0,69897}$ ou seja,

$\log 5 = 0,69897$

c) $6 = 2 \times 3 = 10^{0,30103} \times 10^{0,47712} = 10^{0,30103 + 0,47712}$, então

$6 = 10^{0,77815}$, ou seja,

$\log 6 = 0,77815$

Problema 13

Conhecidos $\log 2 = 0,30103$, $\log 3 = 0,47712$ e $\log 7 = 0,84510$, determine (sem uso de calculadoras) os valores de log 8, log 9, log 12, log 14, log 15, log 189 e log 504.

5.2.1.2 Os logaritmos atingem sua maioridade

Devido à criação e ao desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral no sec. XVII, relacionando a função logarítmica com integrais e séries, os lagaritmos assumiram uma inesperada e destacada importância teórica. Além disso, em termos práticos, as séries possibilitavam, menos de cem anos depois da publicação das primeiras tabelas logarítmicas, método muito mais simples e eficientes de construí-las.

5.2.2 Retomando a seqüência do curso de logaritmos

O problema seguinte pode ser proposto antes da apresentação das propriedades dos logaritmos, pois a sua resolução nos sugere a validade de diversas propriedades, como por exemplo, $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$, ou seja, "o logaritmo transforma multiplicações em adições".

Problema 14

Considerando os trechos de uma tábua de logaritmos, a seguir apresentados, procure efetuar rapidamente (em poucos minutos e sem uso de calculadoras) os cálculos indicados em:

$$\sqrt[7]{\frac{60{,}8 \times 126{,}1^5 \times 7691}{105{,}3}}$$

Tabela:

N	log N
60,8	1,78390
60,9	1,78462
61,0	1,78533
61,1	1,78604
61,2	1,78675
.	.
.	.
.	.
105,0	2,02119
105,1	2,02160
105,2	2,02202
105,3	2,02243

N	log N
125,7	2,09934
125,8	2,09968
125,9	2,10003
126,0	2,10037
126,1	2,10072
.	.
.	.
.	.
7691	3,88598
7692	3,88604
7693	3,88610
7694	3,88615

Resolução:

Consultando a tabela, vemos que $60{,}8 \cong 10^{1,78390}$; $126{,}1 \cong 10^{2,10072}$; $7691 \cong 10^{3,88598}$ e $105{,}3 \cong 10^{2,02243}$. Então:

$$\sqrt[7]{\frac{60{,}8 \times 126{,}1^5 \times 7691}{105{,}3}} \cong \sqrt[7]{\frac{10^{1,78390} \times (10^{2,10072})^5 \times 10^{3,88598}}{10^{2,02243}}} =$$

$$= \sqrt[7]{\frac{10^{1,78390} \times 10^{10,50360} \times 10^{3,88598}}{10^{2,02243}}} =$$

$$= \sqrt[7]{10^{1,78390 + 10,50360 + 3,88598 - 2,02243}} =$$

$$= \sqrt[7]{10^{14,15105}} = 10^{\frac{14,15105}{7}} \cong 10^{2,02158}$$

Mas a própria tabela, olhada da direita para a esquerda, nos informa que $10^{2,02158}$ é aproximadamente igual a 105,1. Portanto:

$$\sqrt[7]{\frac{60{,}8 \times 126{,}1^5 \times 7691}{105{,}3}} \cong 105{,}1$$

Num rápido retrospecto da resolução anterior, vemos que os únicos cálculos que tivemos de efetuar foram:

$$\frac{1,78390 + 5 \times 2,10072 + 3,88598 - 2,02243}{7}$$

De onde se originou cada uma dessas operações? A resposta a essa pergunta deve ser analisada cuidadosamente pois pode-nos sugerir diversas propriedades dos logaritmos.

5.2.3 As propriedades dos logaritmos

"Por intermédio dos logaritmos evitam-se multiplicações e divisões trabalhosas, efetuando os cálculos por adição, ao invés de multiplicação, e subtração, no lugar da divisão. Mesmo a curiosa e laboriosa extração de raízes é efetuada com grande facilidade..."

A afirmação anterior foi feita por Briggs na edição de 1631 de **Aritmética Logaritmica** e seu significado pode ser facilmente entendido pelos alunos que se dispuserem a fazer uma pequena análise da resolução anterior. Esse último problema propicia, portanto, uma ocasião adequada para se enunciar e **demonstrar**, entre outras, as seguintes propriedades (onde $x > 0$, $y > 0$, $0 < b \neq 1$ e $n \in N^*$):

$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$ (o logaritmo transforma multiplicações em adições)

$\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b x - \log_b y$ o logaritmo transforma divisões em subtrações),

$\log_b x^\alpha = \alpha \log_b x$ (o logaritmo transforma potenciações em multiplicações),

$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_b x$ (o logaritmo transforma radiciações em divisões).

Uma vez mais, insistimos em que uma análise da resolução do problema 14 nos induz a essas últimas propriedades, só restando demonstrá-las. Quanto à fórmula da mudança de base, depois de demonstrá-la, podemos retomar as resoluções dos problemas 10 e 11, que haviam sido interrompidas ao nos depararmos com os valores de $\log_{1,03}3$ e $\log_{1}100$. Para completá-las, sugerimos a mudança do logaritmo desejado tanto para a base 10 como para a base **e**, verificando, em seguida, os resultados obtidos com o uso de calculadoras.

6. Aplicações das progressões geométricas e dos logaritmos

A seguir veremos alguns problemas e exemplos variados, envolvendo aplicações das progressões geométricas e dos logaritmos.

Problema 15

Em 1972, o consumo mundial de petróleo foi de $2,7 \times 10^9$ t, superando em 5,1% o consumo do ano anterior. Na ocasião, as reservas totais de petróleo na Terra (incluindo as desconhecidas) eram estimadas em 700×10^9 t. Se o aumento do consumo mundial continuar sendo de 5,1% ao ano, determine, com auxílio de uma calculadora, quando, aproximadamente, se esgotarão tais reservas.

Resolução:

Se o consumo crescer 5,1% ao ano, os consumos anuais a partir de 1972, inclusive, constituirão uma P.G. onde $a_1 = 2,7 \times 10^9$ e $q = 1,051$. Em um total de **n** anos ter-se-á consumido:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{2,7 \times 10^9 (1,051^n - 1)}{1,051 - 1}$$

Para que as reservas se esgotem, deve-se ter $S_n = 700 \times 10^9$, isto é:

$$\frac{2,7 \times 10^9 (1,051^n - 1)}{1,051 - 1} = 700 \times 10^9, \text{ logo:}$$

$$1{,}051^n = \frac{0{,}051 \times 700}{2{,}7} + 1 = 14{,}222\ldots$$

$$n = \log_{1{,}051} 14{,}\bar{2} = \frac{\log 14{,}\bar{2}}{\log 1{,}051} = 53{,}4$$

Portanto, de acordo com essa previsão, as reservas se esgotarão por volta do ano 2025.

Problema 16

Nos recenseamentos de 1960 e 1970 a população brasileira foi estimada, respectivamente, em 70.967.185 e 94.508.554 habitantes. Supondo constante o porcentual de crescimento anual da população nesse período, determine qual foi essa porcentagem.

Resolução:

Supor constante o porcentual de crescimento anual é supor que as populações anuais constituem uma P.G.. Nesta P.G. tem-se $a_1 = 70.967.185$ e $a_{11} = 94.508.554$, logo:

$$a_{11} = a_1 . q^{10} \rightarrow q = \sqrt[10]{\frac{94.508.554}{70.967.185}} \rightarrow q \simeq \sqrt[10]{1{,}3317}$$

Extraindo esta raiz décima com auxílio de uma tábua de logaritmos ou com uma calculadora, obtem-se $q \simeq 1{,}029$. Assim, a cada ano a população foi sendo multiplicada por 1,029, o que nos indica que, naquele período, o aumento anual da população brasileira foi de 2,9%.

Note que este último problema, de um ponto de vista matemático, praticamente consiste em **interpolar nove meios geométricos entre 70.967.185 e 94.508.554.** No entanto, formulado dessa maneira, ele ganha uma aparência de problema "que só interessa aos matemáticos", o que está longe de se constituir em verdade.

Exemplo 3

Os átomos dos elementos radiativos têm uma tendência natural a se desintegrar, emitindo partículas e transformando-se num novo elemento. Conseqüentemente, com o passar do tempo, a quantidade de um material radiativo diminui, podendo-se considerar que seja dada por:

$$M(t) = M_0 . e^{-\alpha t}$$

onde $M(t)$ é a massa do elemento radiativo no instante t, M_0 é sua massa no instante $t = 0$ e α é uma constante que depende apenas do elemento considerado.

O tempo necessário para que se desintegre metade da massa de um elemento radiativo é chamado de **meia-vida** deste elemento. O problema seguinte nos dará uma idéia de como podemos determinar a meia-vida de um elemento.

Problema 17

Se 10% da massa de um elemento radiativo se desintegra em 5 dias, determine com uma calculadora a meia-vida deste elemento.

Resolução:

De acordo com o que foi mencionado no exemplo anterior, temos:

$$M(t) = M_0 . e^{-\alpha t}$$

Para $t = 5$, em dias, temos: $M(5) = M_0 . e^{-5\alpha}$.

Mas $M(5) = 90\%$ de M_0, pois 10% do material se desintegra em 5 dias, e então:

$0{,}9 . M_0 = M_0 . e^{-5\alpha} \rightarrow 0{,}9 = e^{-5\alpha} \rightarrow e^{-\alpha} = \sqrt[5]{0{,}9}$ (1)

Sendo T a meia-vida, em dias, temos:

$M(T) = M_0 . e^{-\alpha T} \rightarrow 0{,}5 . M_0 = M_0 . e^{-\alpha T} \rightarrow e^{-\alpha T} = 0{,}5.$

Lembrando (1), vê-se que:

$$(\sqrt[5]{0{,}9})^T = 0{,}5 \rightarrow T = \frac{\log 0{,}5}{\log \sqrt[5]{0{,}9}} = 30{,}4$$

Portanto a meia-vida daquele elemento é de aproximadamente 30,4 dias.

Exemplo 4

No problema anterior vimos como a meia-vida de um elemento radiativo pode ser determinada. Neste exemplo mencionaremos como podemos calcular a idade de fósseis a partir da meia-vida dos elementos radiativos.

Os raios cósmicos, bombardeando o nitrogênio do ar, ocasionam a formação de um isótopo do carbono: o carbono-14. Esse isótopo é radiativo e, portanto, se desintegra. Constata-se na natureza que há uma proporção fixa entre o número de átomos de carbono e de seu isótopo. Na proporção mencionada, o carbono forma o gás carbônico da atmosfera, CO_2, que será absorvido, na fotossíntese, pelos vegetais, que, por sua vez, servirão de alimentos aos animais.

Dessa forma conclui-se que a atmosfera, os vegetais e os animais possuem uma radiatividade natural, que permanece constante. Quando um vegetal ou animal morre, começa a redução de sua radiatividade, assim explicada: ele deixa de absorver carbono-14 e o que havia sido adquirido, sofrerá gradativa desintegração.

Esse fato possibilita a determinação da idade de fósseis, por meio da avaliação da radiatividade ainda restante nos mesmos, que pode ser medida por um aparelho chamado **contador de Geiger.**

Problema 18

Com um contador de Geiger, verificou-se que a radiatividade restante num certo fóssil é 10% da existente na atmosfera. Sabendo-se que a meia-vida do carbono-14 é de 5.600 anos, determine (com auxílio de uma máquina calculadora) a idade aproximada do fóssil.

Resolução:

De acordo com o que vimos nos dois exemplos anteriores, a massa do carbono-14 é dada por $M(t) = M_0 . e^{-\alpha t}$.

Como a meia-vida daquele isótopo é de 5,6 milênios, temos:

$$\frac{M_0}{2} = M_0 . e^{-5{,}6\alpha}, \text{ logo: } e^{-\alpha} = 0{,}5^{\frac{1}{5{,}6}} \quad (1)$$

Sendo t a idade do fóssil em milênios, temos

$$\frac{M_0}{10} = M_0 . e^{-\alpha t}, \text{ e então, } e^{-\alpha t} = 0{,}1.$$

Lembrando (1), vê-se que: $0{,}5^{\frac{t}{5{,}6}} = 0{,}1$ e então:

$$\frac{t}{5{,}6} = \log_{0{,}5} 0{,}1, \text{ ou seja, } t = 5{,}6 . \log_{0{,}5} 0{,}1 = 18{,}6$$

Então, a idade do fóssil será de, aproximadamente, 18.600 anos.

BIBLIOGRAFIA

(1) BATSCHELET, Edward. **Introdução à matemática para biocientistas.** Trad. Vera Maria Abud Pacífico da Silva e Junia Maria Penteado de Araújo Quitete. Rio de Janeiro, Interciência; São Paulo, EDUSP, 1978.

(2) BOYER, Carl B. **História da matemática.** Trad. Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher/ EDUSP, 1974.

(3) HOGBEN, Lancelot. **Maravilhas da matemática.** Trad. Paulo Moreira da Silva. Rio de Janeiro, Globo, 1946.

(4) TROTTA, Fernando e outros. **Matemática aplicada.** São Paulo, Moderna, 1979.