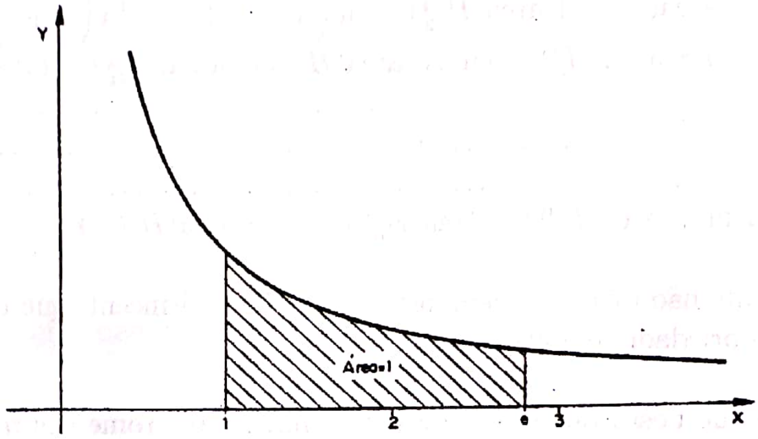
LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA - MAT1511 - LICENCIATURA - 2007
TG6 - O NÚMERO e. A FUNÇÃO EXPONENCIAL

Como a função ln é bijetora, dado o número real 1, existe um único x real, $x > 0$, tal que $\ln x = 1$. Esse número é, por definição, o número **e**. Isto é,

$$\mathbf{e} \text{ é o número tal que } \ln \mathbf{e} = 1, \text{ ou seja é o número tal que área}(H_1^{\mathbf{e}}) = 1$$



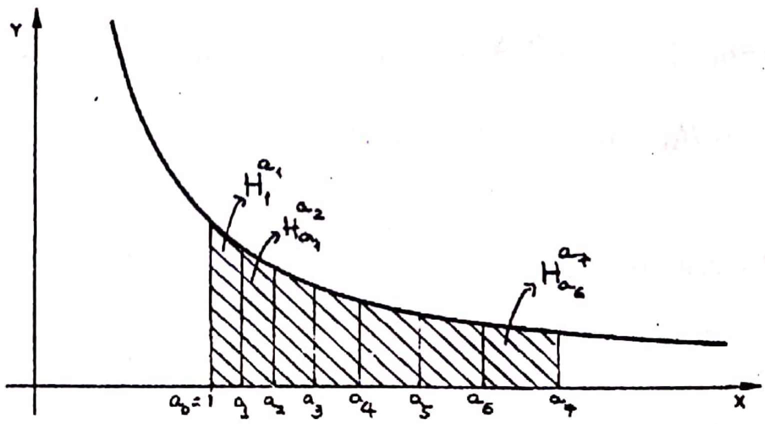
Uma conseqüência imediata da definição é que $\mathbf{e} > 1$. (Justifique)

Por outro lado, já calculamos, aproximadamente, o número ln 3, somando áreas de retêngulos inscritos em H_1^3 (TG3) e vimos que $\ln 3 > 1$ e portanto $\mathbf{e} < 3$.

<u>**Exercício 1**</u>: Mostre que área$(H_1^2) < 1$ e conclua que $\mathbf{e} > 2$.

Para obter o valor exato do número **e**, vamos usar a propriedade que o jesuíta belga, Gregory de St. Vincent, observou em 1647, no livro "Opus geometrium quadratural circuli et sectionum coni", a respeito das áreas sob o gráfico da hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$.

<u>Propriedade</u>: Se escolhermos um número natural n e marcarmos nos eixos das abcissas os pontos 1, $1+\dfrac{1}{n}$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2, \ldots, \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k, \ldots$ pontos de uma PG de 1º têrmo igual a 1
e razão igual a $1 + \dfrac{1}{n}$, teremos que as áreas das regiões $H_1^{a_1}, H_{a_1}^{a_2}, \ldots, H_{a_k}^{a_{k+1}}, \ldots$ (ver figura) são iguais.



No nosso contexto, como já temos definida a função ln e já conhecemos algumas de suas propriedades, podemos fácilmente verificar a afirmação de Saint-Vincent:

$\text{área}(H_1^{a_1}) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

$\text{área}(H_1^{a_1}) + \text{área}(H_{a_1}^{a_2}) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 = 2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 2\text{área}(H_1^{a_1})$, logo,

$\text{área}(H_1^{a_1}) = \text{área}(H_{a_1}^{a_2})$

$\text{área}\ (H_1^{a_1}) + \text{área}(H_{a_1}^{a_2}) + \text{área}(H_{a_2}^{a_3}) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3 = 3\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 3\text{área}(H_1^{a_1})$

e como $\text{área}(H_1^{a_1}) = \text{área}(H_{a_1}^{a_2})$ temos $\text{área}(H_1^{a_1}) = \text{área}(H_{a_1}^{a_2}) = \text{área}(H_{a_2}^{a_3})$

....

....

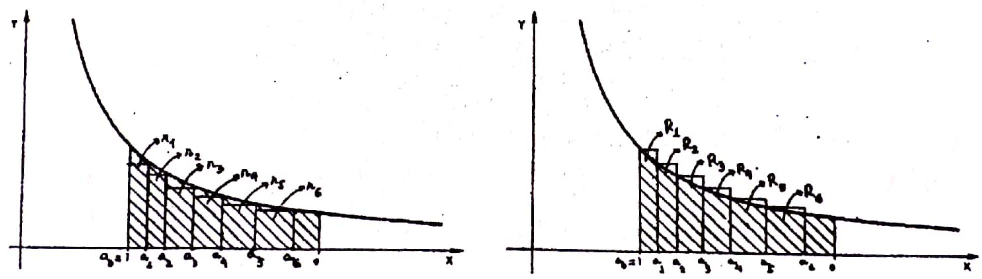
....

Sucessivamente, $\text{área}(H_1^{a_1}) = \text{área}(H_{a_1}^{a_2}) = ... = \text{área}(H_{a_{k-1}}^{a_k})$

Naturalmente não foi essa a demonstração de Saint-Vincent, que não dispunha dos conceitos e propriedade que utilizamos.

Lembre-se que nosso objetivo é avaliar o número **e**. Tomemos $n \in I\!N$ e consideremos os números $a_0 = 1, a_1 = 1+\dfrac{1}{n}, a_2 = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2, a_3 = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3, ..., a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, representados no eixo x, nas figuras a seguir.

Sejam $r_1, ..., r_n$ e $R_1, ..., R_n$ retângulos conforme as figuras abaixo.



Então, cada retângulo r_i, para $i = 1, 2, ..., n$, tem

base: $a_i - a_{i-1}$

altura: $\dfrac{1}{a_i}$

e, portanto, sua área é: (complete nos pontilhados)

$$\text{área}(r_i) = [a_i - a_{i-1}]\frac{1}{a_i} = 1 - \frac{a_{i-1}}{a_i} = \text{..} = \frac{1}{n+1}$$

e cada retângulo R_i, para $i = 1, 2, ..., n$, tem

base: ....

altura: ....

e, portanto, sua área é:

$$\text{área}(R_i) = \text{..} = \frac{1}{n}.$$

Chamando de A a área da região $H_1^{a_n}$ temos:

área $(r_1)+$ área $(r_2)+\ldots+$ área$(r_n) < A <$ área$(R_1)+$ área$(R_2)+\ldots+$ área(R_n) isto é,

$$\frac{n}{n+1} < A < \frac{n}{n} \quad \text{(justifique)}$$

ou seja,

$$\frac{n}{n+1} < A < 1.$$

Fazendo $n \to \infty$ temos $A \to 1$, isto é,

$$n \to \infty \Rightarrow \text{área}(H_1^{a_n}) \to 1.$$

Como área $(H_1^{\mathbf{e}}) = 1$, podemos concluir que

$$n \to \infty \Rightarrow a_n \to \mathbf{e},$$

isto é, numa notação mais precisa,

$$\boxed{\mathbf{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

<u>Exercício 2</u>: Complete a tabela abaixo, com o uso de uma calculadora, para encontrar valores aproximados de **e**.

n	2	4	5	8	16	32	64	100	128
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$									

O número **e** é chamado <u>base</u> da função ln e a função ln é chamada função logarítmica de base **e** (ln também é chamado de logaritmo natural ou logaritmo neperiano, em homenagem a Napier).

Uma vez que a função ln é inversível, podemos considerar sua inversa $\ln^{-1}$ que denominamos <u>função exponencial</u> e utilizamos para ela a notação $\ln^{-1}(x) = \exp x = e^x$.

<u>Exercício 3</u>: Determine o $Dom(\exp)$ e a $Im(\exp)$.

<u>Exercício 4</u>: a) A partir do gráfico de ln esboce o gráfico de exp.

b) Calcule:

$\exp 1 = \ldots$

$\ln(\exp x) = \ldots$, para $x \in \ldots$

$\exp(\ln x) = \ldots$, para $x \in \ldots$

A função exp é crescente?

c) Verifique que:

$\exp(a+b) = \exp(a)\cdot\exp(b)$

$\exp(a-b) = \exp(a)/\exp(b)$

Observações:

1. Denotaremos $\exp(x) = e^x$. Observe que esta notação se justifica pelas propriedades listadas no exercício anterior (propriedades da potência).

2. Para um número $a > 0$ e b qualquer definimos $a^b = e^{b \ln a}$. Observe que temos então definida qualquer potência de um real positivo e que se $b \in Q$, $b = p/q$, $e^{b \ln a}$, coincide com a raiz q-ésima de a elevada à p, pelas propriedades de logaritmo.

3. Podemos agora definir logaritmo em qualquer base positiva:

   Seja $a > 0$, $a \neq 1$, definimos $\log_a^x$ como sendo o número real b tal que $a^b = x$. Mas, se $a^b = x$, então $b \ln a = \ln x$ e portanto, $b = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. Logo, obtemos a igualdade

$$\log_a^x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Agora, não é difícil ver como serão os gráficos de $\log_a^x$ e de a^x, para $a > 0$ qualquer.

Exercício 5: Esboce-os considerando pelo menos um valor para $a > 1$ e outro para $a < 1$.