LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA - MAT1513 - LICENCIATURA - 2007
TG5 - Definição de Logaritmo

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 < a < b$ denotaremos por H_a^b a região sob o gráfico da hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$ com $a \le x \le b$ e acima do eixo x, isto é, H_a^b é a região:

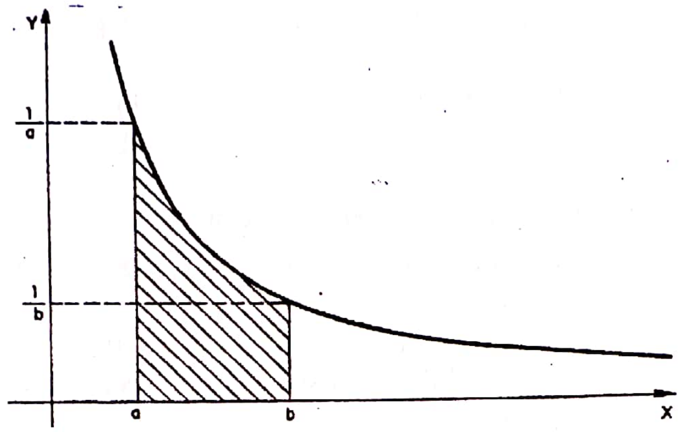


Figura 1

Propriedade Fundamental das áreas das regiões do tipo H_1^a

<u>**Propriedade Fundamental**</u>: Sejam $k > 0$ e $0 < a < b$. Então as regiões H_a^b e H_{ak}^{bk} têm a mesma área.

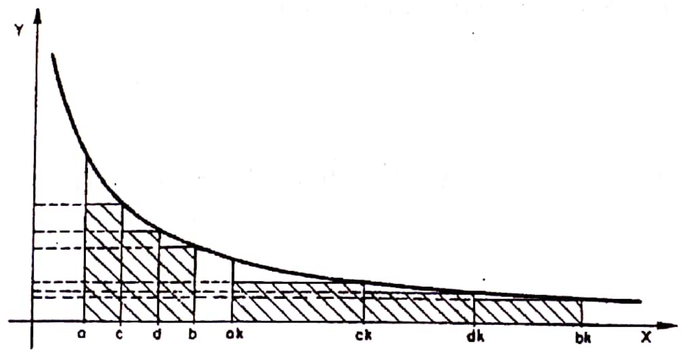


Figura 2

Para verificar a propriedade observemos primeiramente o seguinte fato : Dado um retângulo inscrito em H_a^b, cuja base é o intervalo $[c, d]$, podemos construir um retângulo, cuja base é $[ck, dk]$ que está inscrito em H_{ak}^{bk} com mesma área que o primeiro. Com efeito, a área do primeiro é

$$(d - c) \times \frac{1}{d} = 1 - \frac{c}{d}$$

enquanto a área do segundo é (complete) ....

Logo quando considerarmos retângulos inscritos em H_a^b podemos encontrar retângulos inscritos em H_{ak}^{bk} com mesma área que os anteriores. Reciprocamente, dado um retângulo inscrito em H_{ak}^{bk} com base no intervalo $[r, s]$, podemos construir um retângulo cuja base é $[\frac{r}{k}, \frac{s}{k}]$ inscrito em H_a^b com mesma área que o primeiro. Portanto a soma das áreas dos retângulos inscritos em H_a^b é igual à soma das áreas dos retâgulos inscritos em H_{ak}^{bk}. Logo é razoável que as regiões H_a^b e H_{ak}^{bk} tenham a mesma área.

Conseqüência: Se $a > 1$ e $b > 1$, então, usando que $H_1^{ab} = H_1^b \cup H_b^{ab}$ e a propriedade fundamental, temos que:

$$\text{área}(H_1^{ab}) = \text{área}(H_1^b) + \text{área}(H_1^a).$$

Assim se definirmos uma função, f, que a cada $x > 1$ associa área(H_1^x) teremos

$$f(ab) = f(a) + f(b), \quad \text{para todo } a > 1 \text{ e } b > 1.$$

A pergunta natural é:
uma vez que estamos considerando regiões que estão abaixo do gráfico $y = \dfrac{1}{x}$ e acima do eixo x, para $x > 0$, será possível extender a função f para todo o intervalo $]0, \infty[$? Ou seja, será possível encontrar uma outra função g cujo domínio é $]0, \infty[$, que coincide com f em $]1, \infty[$ e que conserva a propriedade $g(ab) = g(a) + g(b)$ mesmo em $]0, 1]$?
Para mostrar que g existe vamos arranjar uma "candidata" e provar que ela funciona. Antes disso, resolva o seguinte:

Exercício 1: Mostre que se g é uma função que satisfaz $g(a,b) = g(a) + g(b)$ $\forall a, b > 0$, então $g(1) = 0$.

Assim, em primeiro lugar, como a candidata g deve satisfazer a propriedade $g(ab) = g(a)+g(b)$, temos que $g(1) = 0$.
Em segundo lugar, se $0 < a < 1$, então temos evidentemente $\dfrac{1}{a} > 1$ e área $H_1^{\frac{1}{a}}$ = área $H_{1a}^{\frac{1}{a}a}$ = área H_a^1.

Agora nossa candidata g verifica
$$0 = g(1) = g(a\frac{1}{a}) = g(a) + g\left(\frac{1}{a}\right) = g(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) =$$
$$= g(a) + \text{ área } H_1^{\frac{1}{a}}$$
$$= g(a) + \text{ área } H_a^1$$

Ou seja, para a entre 0 e 1, $g(a)$ deve ser negativa, pois a área $D_a^1 > 0$ e ainda, nossa candidata calculada em um número a, $0 < a < 1$ é $g(a) =$ - área H_a^1.
Arriscamos então a seguinte definição: (Faça um esboço das áreas que aparecem na definição)

$$g(x) = \begin{cases} f(x) = \text{ área } H_1^x & \text{se} \quad x > 1 \\ 0 & \text{se} \quad x = 1 \\ -\text{ área } H_x^1 & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

Precisamos mostrar que g satisfaz a propriedade $g(ab) = g(a)+g(b)$ para todos a e b estritamente positivos. O fato de g ser uma extensão de f é evidente, certo?
1^0 caso: se $a > 1$ e $b > 1$ nada temos a fazer. Por quê?

2^0 caso: se $0 < a < b < 1$ então certamente $ab < a$. Por quê?
$\acute{a}rea H_{ab}^1 = \acute{a}rea H_{ab}^a + \acute{a}rea H_a^1 =$
$= \acute{a}rea H_b^1 + \acute{a}rea H_a^1$
ou seja, multiplicando por (-1)

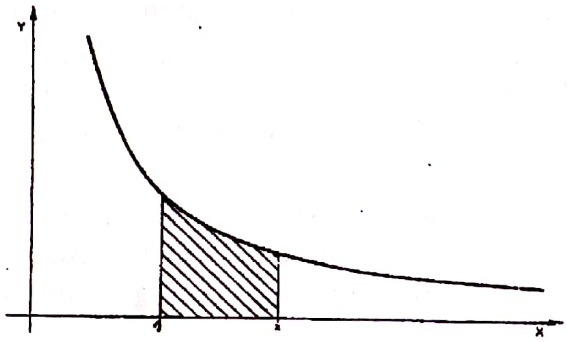
$-$área $H_{ab}^1 = -$área H_b^1 $-$ área H_a^1
isto é $g(ab) = g(b) + g(a)$.

3^0 caso: se $0 < a < 1 < b$ então pode acontecer $0 < a < 1 < ab < b$ ou $0 < a < ab < 1 < b$. Por quê?
a) Se $0 < a < 1 < ab < b$
Neste caso $ab > 1$ e $b > 1$
área $H_1^b =$ área H_1^{ab} + área $H_{ab}^b =$
$=$ área H_1^{ab} + área H_a^1.
Logo área $H_1^{ab} =$ área H_b^1 $-$ área H_a^1
$g(ab) = g(b) + g(a)$

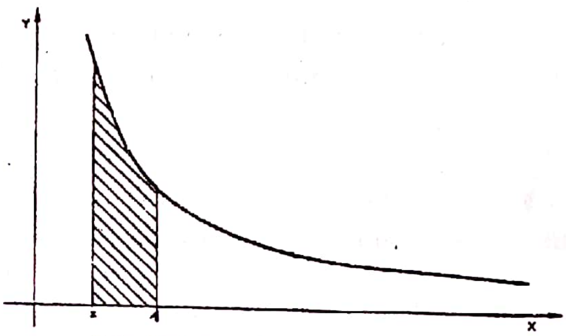
<u>**Exercício 2:**</u> Mostre que $g(ab) = g(b) + g(a)$ também no caso abaixo. Não deixe de esboçar o gráfico das áreas.
b) Se $0 < a < ab < 1 < b$

Conclusão: Provamos que assim existe uma função g, que extende a f inicial e que verifica $g(ab) = g(a) + g(b)$ para quaisquer $a > 0$ e $b > 0$.

Observe que o processo de construção da função g nos garante que ela é única. Por quê?



A área hachurada é igual a ln x.



Quando $0 < x < 1$, ln x é a área da faixa hachurada, com o sinal menos.

Definição: A função g construída é denominada ln e é a função definida em $]0, +\infty[$ dada por

$$\boxed{\begin{array}{l} \ln(x) = \text{área}(H_1^x)\ ,\ \text{ se } x > 1 \\ \ln(1) = 0 \\ \ln(x) = -\text{área}(H_x^1)\ ,\ \text{ se } 0 < x < 1\,, \end{array}}$$

e essa função tem a propriedade

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)\ ,\quad \text{para todos } a > 0 \text{ e } b > 0\,.$$

Podemos observar que:

$$\ln(x) > 0 \ \text{ se, e somente se, } \ x > 1\,;$$
$$\ln(x) = 0 \ \text{ se, e somente se, } \ x = 1\,;$$
$$\ln(x) < 0 \ \text{ se, e somente se, } \ 0 < x < 1.$$

No exercício 3 abaixo, apresentamos algumas propriedades da função ln .

Exercício 3: Verifique, usando a definição dada e as propriedades desenvidas anteriormente, que:

(i) $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$, para todo $a > 0$;

(ii)$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$, para todo $a > 0$ e $b > 0$;

(iii) $\ln(a^n) = n\ln(a)$, para todo $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$;

(iv) $\ln(a^{\frac{1}{q}}) = \frac{1}{q}\ln(a)$, para todo $a > 0$ e $q \in \mathbb{N}^*$;

(v) $\ln(a^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q}\ln(a)$, para todo $a > 0$, $p \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{N}^*$;

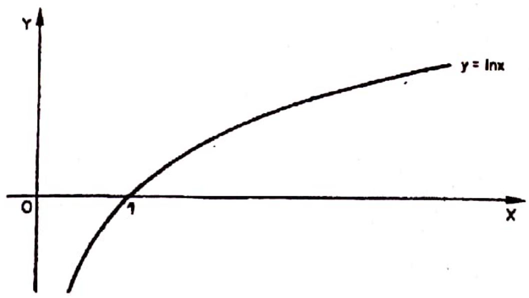
(vi) $\ln(a^r) = r\ln(a)$, para todo $a > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$;

(vii) a função ln é uma função estritamente crescente, isto é,

$$\text{se} \quad a > b > 0 \,, \quad \text{então} \quad \ln(a) > \ln(b)\,.$$

Da afirmação (vii) concluímos que a função ln é uma função injetora, isto é, se $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq b$, então $\ln(a) \neq \ln(b)$.
Prova-se que a função ln é uma função sobrejetora sobre $\mathbb{R}$ (Ver no livro Logaritmos de Elon Lages Lima, IMPA-VITAE), isto é, dado um $b \in \mathbb{R}$ qualquer, sempre existe um $a > 0$ (que neste caso é único) tal que $\ln(a) = b$.

Utilizando que a função ln é estritamente crescente, que é sobrejetora (e os exercícios 14 e 15 do livro Logaritmos de Elon Lages Lima, IMPA-VITAE, página 52 para uma prova completa), obtemos que o gráfico da função ln tem a seguinte forma :



Exercício 4: Admitindo como valores para ln 4 e ln 3 as aproximações $\ln 4 \approx 1,3862$ e $\ln 3 \approx 1,0986$ (esses não são os valores exatos, mas sim aproximações com erro bem pequeno) determine, através das propriedades de ln os valores de:

(a) $\ln 8$	(b) $\ln 6$	(c) $\ln 72$	(d) $\ln \frac{27}{128}$
(e) $\ln(0,666\ldots)$	(f) $\ln \sqrt{12}$	(g) $\ln(2^m \cdot 2^n)$	(h) $\ln \sqrt[3]{216}$

Exercício 5: Assinale as afirmações certas e as erradas:

a) $\ln N = -\ln \frac{1}{N}$

b) $\sqrt{a} = \frac{1}{2} \cdot \ln a$

c) $(\ln x)^6 = 6 \cdot \ln x$

d) $\ln \frac{ab^2}{c} = \frac{\ln a + 2 \cdot \ln b}{\ln c}$

e) $\ln(xy)^3 = (\ln x + \ln y)^3$

f) $\dfrac{p}{q} = \ln p - \ln q$

g) $x^3 = 3 \cdot \ln x$

h) $3\ln(\ln x) = \ln(\ln x)^3$

i) $\ln N = \dfrac{b}{a}\ln(N^{a/b})$

j) $\ln(a^3 + b^4) = 3 \cdot \ln a + 4 \cdot \ln b$

l) $\dfrac{1}{3}\ln a + \dfrac{1}{4}\ln b^2 - \dfrac{1}{6}\ln c = \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{a^4 b^6}{c^2}$

Exercício 6: Mostre que para todo $x \geq 1$, tem-se: $\ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\right) = 2\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

Exercício 7: (a) Mostre que, para todo $x > 0$ e todo $h > -x$, $h \neq 0$, h racional, tem-se:

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h}$$

(b) Usando a definição de ln por área, mostre que: $\dfrac{h}{1+h} < \ln(1+h) < h$ para todo $h > 0$. Por que podemos afirmar que se h for um número positivo muito próximo de zero então valerá que $\dfrac{1}{h}\ln(1+h)$ fica próximo de 1?

Bibliografia:

Lima, E. L. Logaritmos, IMPA-VITAE, 1991

Druck, I.F. Um pouco de história de potências, exponenciais e logaritmos. RT-MAT 95-24, IME-USP, 1995.