LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA - MAT1513 - LICENCIATURA - 2007
Logaritmos um pouco de história

I - Logaritmos - um pouco da história

Os Logaritmos foram inventados, de maneira independente, por John Napier (1550-1617), barão escocês, teólogo e matemático, e por Jost Bürgi (1552-1632), suíço, matemático e fabricante de instrumentos astronômicos. Segundo os historiadores, sem que nenhum tivesse conhecimento do outro, as tabelas de logaritmos de Napier foram publicadas em 1614 e as de Bürgi em 1620. Os dois procuravam resolver o problema de simplificar as longas operações de multiplicação e divisão que vinham exigindo os recentes desenvolvimentos da Astronomia e da Navegação, tanto envolvendo números muito grandes como frações decimais muito pequenas.
Para elaborar suas tabelas eles utilizaram uma idéia, já bem conhecida naquele tempo, que relaciona progressões aritméticas com progressões geométricas. Numa publicação de 1544, Michael Stifel havia colocado lado a lado uma PA e uma PG no seu livro "Aritmética Íntegra" para observar uma relação interessante entre elas: a multiplicação de termos numa PG corresponde à adição de termos da PA. Considerando

$PA:$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$PG:$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	...

então, por exemplo, para obter o resultado de 16×64, basta ver que:

- 16 na 2^a linha corresponde a 4 na 1^a.
- 64 na 2^a linha corresponde a 6 na 1^a.
- que $4 + 6 = 10$ e que
- 10 na 1^a linha corresponde a 1024 na 2^a.

Portanto, uma vez que $16 \times 64 = 1024$, a operação produto fica reduzida à adição que é uma operação bem mais simples.
Naquela época não havia sido ainda introduzida a **notação de potência** (2^n) e nem era identificada a **idéia de função**. Somente um século depois é que essas idéias e algumas notações vieram a ser desenvolvidas por René Descartes e Pierre de Fermat. Na ausência desses instrumentos a correspondência entre os termos da PA e da PG era dada pela contiguidade da escrita. Stifel observou explicitamente que:

- soma na PA corresponde a produto na PG
- diferença na PA corresponde a quociente na PG.

Exercícios

1. Através da correspondência acima, diga quanto vale:
   a) $32 \times 128 =$
   b) $2048 \div 256 =$

2. Utilizando a notação de potência que você conhece, justifique as duas "regras" descritas por Stifel.

Napier utilizou, como razão, na sua PG, um número um pouco menor do que 1, a saber 0,9999999 ($= 1 - 10^{-7}$) enquanto que Bürgi empregou uma razão algo pouco maior do que 1, qual seja 1,0001 ($= 1 + 10^{-4}$) e desse modo obtiveram PGs cujos termos consecutivos eram números muito próximos. Ambos colocaram como termo inicial das suas progressões geométricas números grandes (observe os valores de a_0 e b_0, definidos a seguir), deixando a impressão de que, de fato, eram os produtos de grandes números com muitos dígitos que mais estavam interessando. De qualquer maneira já era conhecida a possibilidade de mudar a posição da vírgula multiplicando por potências de 10. Em notação moderna, a primeira tabela de Napier era formada pelos primeiros 100 termos da progressão geométrica cujo termo geral é:

$$a_n = 10^7(1 - 10^{-7})^n \quad (n = 0, 1, 2, ..., 100).$$

Exercício 3:
Escreva a_1, a_2 e a_3.

A tabela de Bürgi descrevia os termos da progressão geométrica cujo termo geral é:

$$b_n = 10^8(1 + 10^{-4})^n \quad (n = 0, 1, 2, ..., 23.027)$$

que ia até 23.027 termos $[(1 + 10^{-4})^{23.027} \approx 10^8]$.
Para você ter uma idéia de como as tabelas eram utilizadas, faça o exercício a seguir.

Exercício 4 - Construa com o auxílio de uma calculadora a progressão geométrica de termo geral $c_n = (1 + 10^{-3})^n$ até o termo c_{10} e calcule um valor aproximado de 1004006×1006015 utilizando esta tabela.

Napier parece ter ficado muito entusiasmado com seu trabalho, ao qual deu o nome de "Mirifici logarithmorum canonis descriptio": uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos (Logaritmo, palavra inventada por Napier juntando "logos" e "aritmos", número de razão.
Já Bürgi chamou seu livro sobre o assunto de "Arithmetische und Geometrische Progress Tabules", numa citação objetiva do conteúdo das tabelas.
A influência de Napier no desenvolvimento dos logaritmos foi maior que a de Bürgi devido as suas muitas publicações e seu relacionamento com professores universitários.
Logo após o aparecimento da primeira tábua, ou tabela, de Napier, o matemático inglês Henry Briggs (1561-1631) professor da Universidade de Londres, e depois de Oxford, elaborou juntamente com Napier, uma nova tábua, de mais fácil utilização, contendo os chamados logaritmos decimais, que tiram proveito do fato de usarmos um sistema decimal de numeração.
Uma tábua de logaritmos consiste essencialmente de duas colunas de números. A cada número da coluna à esquerda corresponde um número da coluna à sua direita, chamado seu logaritmo. Para multiplicar dois números basta somar seus logaritmos - o resultado é o logaritmo do produto. Para achar, então, o produto dos números basta voltar na tábua, da direita para a esquerda e ler qual o número que tem aquele logaritmo.
Semelhantemente:
- para dividir dois números basta subtrair os logaritmos.
- para elevar um número a uma potência basta multiplicar o logaritmo do número pelo expoente
- para extrair a raiz n-ésima de um número basta (complete) ....

A utilidade original dos logaritmos resulta, portanto, da observação: o trabalho de elaborar uma tábua de logaritmos por mais longo e cansativo que seja, é um só. Depois dele feito ninguém precisa mais, digamos, efetuar multiplicações; adições bastam.
Durante os quase 4 séculos que se seguiram à descoberta dos logaritmos sua utilidade revelou-se decisiva na Ciência e Tecnologia. Já Kepler, por volta de 1620, dizia que a nova descoberta "aumentava vastamente o poder computacional do astrônomo".

Com a utilização cada vez mais divulgada das calculadoras, as tábuas de logaritmos perderam sua utilidade como instrumento de cálculo. Mas o estudo dos logaritmos ainda é e continuará a ser de central importância, pois o desenvolvimento da Matemática e das ciências em geral veio mostrar que diversas leis matemáticas e vários fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos são estreitamente relacionados com os logaritmos. Alguns exemplos desses fenômenos são: cálculo de juros contínuos, desintegração radioativa, o método do carbono 14 para identificação da idade de fósseis, ...
Assim sendo, os logaritmos que eram importantes apenas para cálculos numéricos, mostram ter valor intrínseco e muitas oplicações em várias áreas de conhecimento.

II. Área da região sob o gráfico da hipérbole e acima do eixo x

Consideremos a hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$ e o ramo positivo de seu gráfico, isto é, o gráfico para valores reais positivos de x.

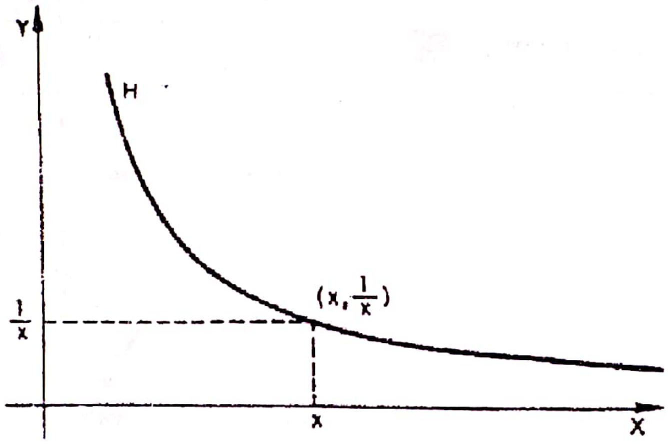

Figura 1

Vamos estabelecer um procedimento para calcular a área da região hachurada na figura, que é a área sob o gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$ para $1 \leq x \leq a$ e acima do eixo x. Vamos denotar essa região por H_1^a.
Por meio de pontos intermediários decompomos o intervalo $[1, a]$ num número finito de subintervalos consecutivos.

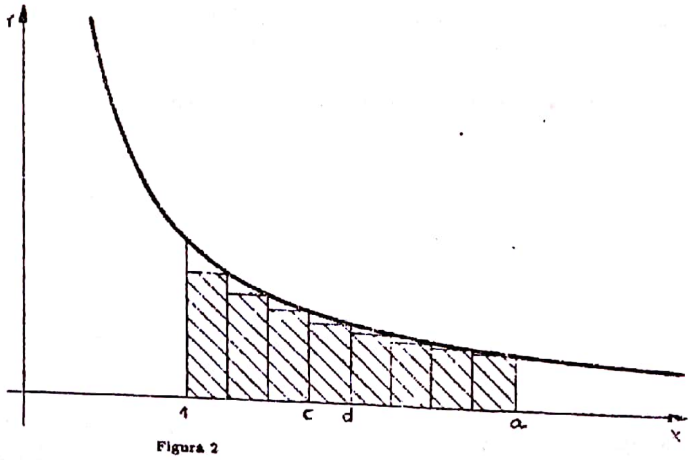

Figura 2

Com base em cada um dos intervalos $[c, d]$ (figura 2) da decomposição consideramos o retângulo de altura igual a $\frac{1}{d}$. O vértice superior direito desse retângulo encontra o gráfico da hipérbole no ponto $\left(d, \frac{1}{d}\right)$. Cada um desses retângulos é chamado de retângulo inscrito na região H_1^a. A soma das áreas desses retângulos será utilizada para obter aproximações da área de H_1^a.
É fácil calcular a soma das áreas dos retângulos quando se conhecem os pontos da divisão. Vejamos um exemplo. Vamos considerar a região H_1^3. Na figura 3 tomamos a decomposição do intervalo [1,3] através dos pontos $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3$. Obtemos então para soma das áreas dos retângulos:

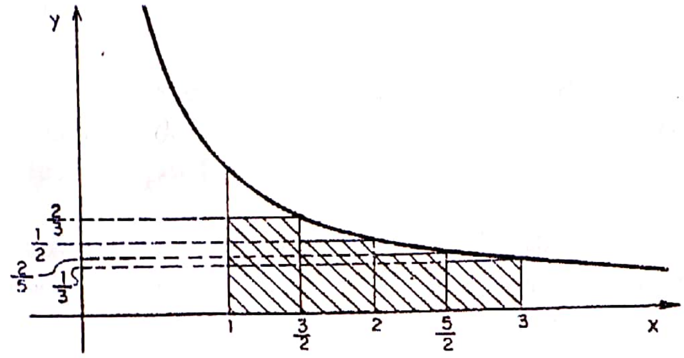

Figura 3 – Uma primeira aproximação para a área de H_1^3.

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} =$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60}$$

Se porém efetuarmos uma subdivisão mais fina do intervalo [1,3], por meio dos pontos $1, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{8}{4}, \frac{9}{4}, \frac{10}{4}, \frac{11}{4}, 3$ (figura 4) obtemos 8 retângulos inscritos cuja soma das áreas vale:

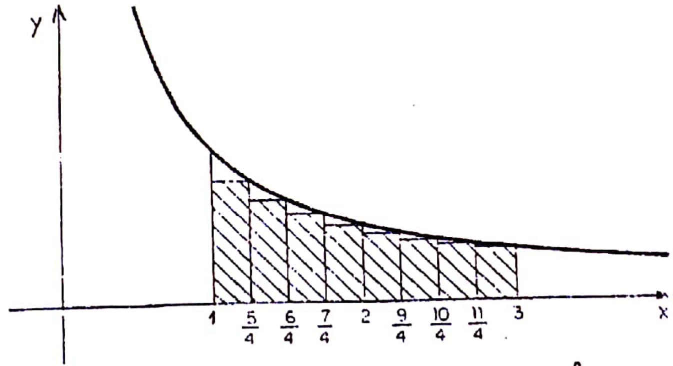

Figura 4 – Uma aproximação melhor para a área H_1^3.

Complete: $\frac{1}{5} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$

$\frac{84.813}{83.160} \cong 1,019.$

Cada subdivisão do intervalo $[1, a]$, para a um número real, $a > 1$, a soma das áreas dos retângulos inscritos fornece um valor aproximado por falta da área da região H_1^a. Tanto melhor será essa aproximação quanto mais fina for a subdivisão do intervalo $[1, a]$. Isto é, quanto mais pontos estiverem sendo considerados na subdivisão, menor será a diferença entre o "valor exato da área" de H_1^a e a soma das áreas dos retângulos inscritos. Assim podemos definir a área (inferior) de H_1^a como sendo o número real cujas aproximações por falta são as somas das áreas dos retângulos inscritos em H_1^a, que se obtém fazendo-se subdivisões sucessivas do intervalo $[1, a]$. Podemos também dizer que a área de H_1^a é o extremo superior do conjunto dos números que se obtém somando-se as áreas dos retângulos inscritos com subdivisões cada vez mais finas.

Voltando ao exemplo do intervalo [1,3] vemos que $\dfrac{57}{60}$ é uma aproximação inferior para a área da região H_1^a, enquanto que $\dfrac{84.813}{83.160}$ é uma aproximação inferior melhor. Embora não saibamos ainda o valor exato da área de H_1^3, já podemos garantir que H_1^3 tem área maior que 1, pois área $(H_1^3) > \dfrac{84.813}{83.160} \cong 1,019$.

Exercício 5: Decomponha o intervalo [1,4], primeiro em 6 partes iguais, depois em 12 partes iguais e calcule a soma das áreas dos retângulos inscritos, relativos à essas duas subdivisões, ou seja, calcule duas aproximações por falta de H_1^4.

Exercício 6: Repita o Exercício 4, considerando os retângulos indicados na figura, que dão aproximações por excesso da área de H_1^4. Exiba 2 números α e β tais que $\alpha <$ área $H_1^4 < \beta$.

Bibliografia:

Lima, E. L. Logaritmos, IMPA-VITAE, 1991

Druck, I.F. Um pouco de história de potências, exponenciais e logaritmos. RT-MAT 95-24, IME-USP, 1995.