G Números Complexos

Um **número complexo** pode ser representado por uma expressão da forma $a + bi$, onde a e b são números reais e i é um símbolo com a propriedade de que $i^2 = -1$.

O número complexo $a + bi$ pode também ser representado pelo par ordenado (a, b) e plotado como um ponto num plano (chamado de plano de Argand), como na Figura 1; assim, o número complexo $i = 0 + 1 \cdot i$ está identificado como o ponto $(0, 1)$.

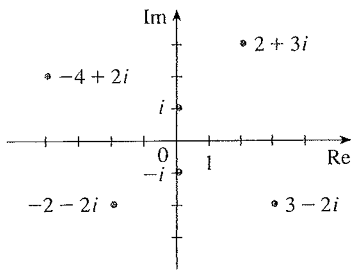


FIGURA 1
Números complexos como pontos no plano de Argand

A **parte real** do número complexo $a + bi$ é o número real a, e a **parte imaginária** é o número real b. Assim, a parte real de $4 - 3i$ é 4 e a parte imaginária é -3.

Dois números complexos $a + bi$ e $c + di$ são **iguais** se $a = c$ e $b = d$, isto é, se suas partes reais e imaginárias forem iguais.

No plano de Argand o eixo x é chamado de eixo real, ao passo que o eixo y é chamado de eixo imaginário.

A soma e a diferença de dois números complexos são definidas pela soma ou subtração de suas partes reais e imaginárias:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Por exemplo,

$$(1 - i) + (4 + 7i) = (1 + 4) + (-1 + 7)i = 5 + 6i$$

O produto de dois números complexos é definido de tal forma que as propriedades comutativa e distributiva se mantenham:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= a(c + di) + (bi)(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2\end{aligned}$$

Uma vez que $i^2 = -1$, isso fica

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

EXEMPLO 1

$$\begin{aligned}(-1 + 3i)(2 - 5i) &= (-1)(2 - 5i) + 3i(2 - 5i) \\ &= -2 + 5i + 6i - 15(-1) = 13 + 11i\end{aligned}$$

A divisão entre números complexos se parece muito com a racionalização do denominador de uma expressão racional. Para um número complexo $z = a + bi$, definimos seu **complexo conjugado** como sendo $\bar{z} = a - bi$. Para encontrar o quociente de dois números complexos multiplicamos o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador.

EXEMPLO 2 Expresse o número $\dfrac{-1 + 3i}{2 + 5i}$ na forma $a + bi$.

SOLUÇÃO Multiplicando-se o numerador e o denominador pelo complexo conjugado de $2 + 5i$, isto é, $2 - 5i$, e levando-se em conta o resultado do Exemplo 1:

$$\frac{-1 + 3i}{2 + 5i} = \frac{-1 + 3i}{2 + 5i} \cdot \frac{2 - 5i}{2 - 5i} = \frac{13 + 11i}{2^2 + 5^2} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29} i$$

A interpretação geométrica do número complexo está na Figura 2: $\bar{z}$ é a reflexão z em torno do eixo real. Uma lista das propriedades do complexo conjugado estão a seguir. As provas seguem da definição e serão requisitadas no Exercício 18.

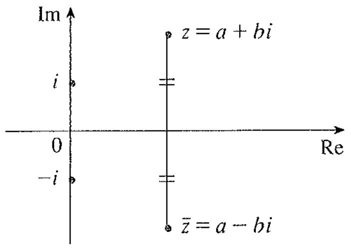


FIGURA 2

Propriedades dos Conjugados

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \qquad \overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w} \qquad \overline{z^n} = \bar{z}^n$$

O **módulo**, ou **valor absoluto**, $|z|$ de um número complexo $z = a + bi$ é sua distância até a origem. Da Figura 3 vemos que se $z = a + bi$, então

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

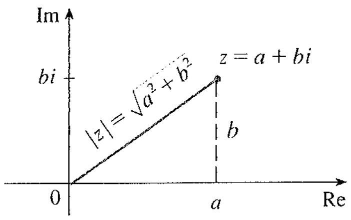


FIGURA 3

Observe que

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

e portanto

$$\boxed{z\bar{z} = |z|^2}$$

Isso explica por que o processo de divisão no Exemplo 2 funciona em geral:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$$

Uma vez que $i^2 = -1$, podemos pensar i como sendo a raiz quadrada de -1. Note porém que também temos $(-i)^2 = i^2 = -1$, e portanto $-i$ é também uma raiz quadrada de -1. Dizemos que i é a **raiz quadrada principal** de -1 e escrevemos $\sqrt{-1} = i$. Em geral, se c for um número positivo, escrevemos

$$\sqrt{-c} = \sqrt{c}\, i$$

Com essa convenção a dedução usual e a fórmula para as raízes de uma equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ são válidas mesmo que $b^2 - 4ac < 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EXEMPLO 3 Ache as raízes da equação $x^2 + x + 1 = 0$.

SOLUÇÃO Usando a fórmula quadrática temos que

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

Observamos que as soluções da equação no Exemplo 3 são conjugadas complexas uma da outra. Em geral, as soluções de qualquer equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ com coeficientes reais a, b e c são sempre conjugadas complexas. (Se z for real, $\bar{z} = z$, logo z é a própria conjugada.)

Vimos que se permitirmos números complexos como soluções, então toda equação quadrática tem uma solução. Mais geralmente, é verdade que toda equação polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

de grau no mínimo 1 tem uma solução entre os números complexos. Esse fato é conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra e foi provado por Gauss.

Forma Polar

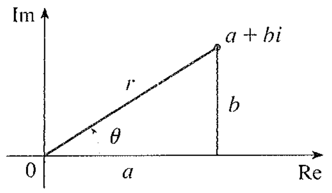


FIGURA 4

Sabemos que qualquer número complexo $z = a + bi$ pode ser considerado como um ponto (a, b) e que tal ponto pode ser representado em coordenadas polares (r, θ) com $r \geqslant 0$. De fato,

$$a = r\cos\theta \qquad b = r\,\text{sen}\,\theta$$

como na Figura 4. Portanto temos que

$$z = a + bi = (r\cos\theta) + (r\,\text{sen}\,\theta)i$$

Assim, podemos escrever qualquer número complexo z na forma

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)}$$

onde $\quad r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad$ e $\quad \text{tg}\,\theta = \dfrac{b}{a}$

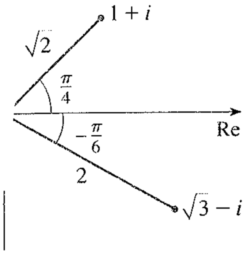
O ângulo θ é chamado de **argumento** de z, e escrevemos $\theta = \arg(z)$. Note que $\arg(z)$ não é única; quaisquer dois argumentos de z diferem entre si por um múltiplo inteiro de 2π.

EXEMPLO 4 Escreva os números a seguir na forma polar.
(a) $z = 1 + i$ (b) $w = \sqrt{3} - i$

SOLUÇÃO
(a) Temos que $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e $\text{tg}\,\theta = 1$; assim, podemos tomar $\theta = \pi/4$. Portanto a forma polar é

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

(b) Aqui temos $r = |w| = \sqrt{3 + 1} = 2$ e $\text{tg}\,\theta = -1/\sqrt{3}$. Uma vez que w está no



JRA 5

quarto quadrante, tomamos $\theta = -\pi/6$ e

$$w = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Os números z e w estão na Figura 5.

A forma polar dos números complexos nos dá um *insight* sobre a multiplicação e a divisão. Sejam

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

dois números complexos escritos na forma polar. Então

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)] \end{aligned}$$

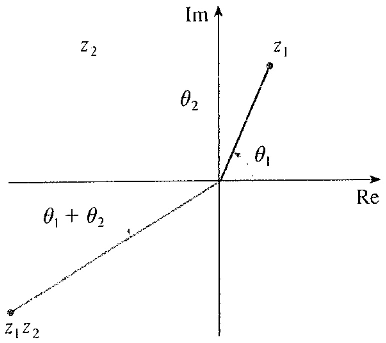


FIGURA 6

Portanto, usando as fórmulas de adição para seno e cosseno, temos

1 $$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]}$$

Essa fórmula nos diz que *para multiplicar dois números complexos multiplicamos os módulos e somamos os argumentos* (veja a Figura 6).

Um argumento similar usando as fórmulas de subtração para seno e cosseno mostra que *para dividir dois números complexos dividimos os módulos e subtraímos os argumentos.*

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \qquad z_2 \neq 0}$$

Em particular, tomando $z_1 = 1$ e $z_2 = z$, temos o seguinte, que está ilustrado na Figura 7.

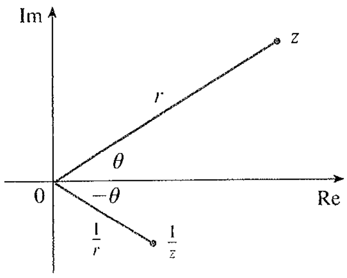


FIGURA 7

$$\boxed{\text{Se} \quad z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta), \quad \text{então} \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta).}$$

EXEMPLO 5 Ache o produto dos números complexos $1 + i$ e $\sqrt{3} - i$ na forma polar.

SOLUÇÃO Do Exemplo 4 temos que

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

e

$$\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

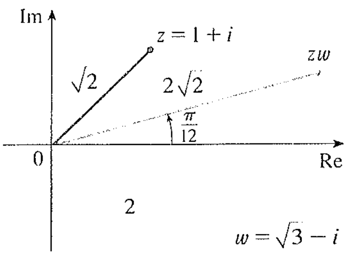


FIGURA 8

Assim, pela Equação 1,

$$(1 + i)(\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)$$

Isso está ilustrado na Figura 8.

O uso repetido da Fórmula 1 mostra como computar potências de um número complexo. Se

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

então $$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$$

e $$z^3 = zz^2 = r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta)$$

Em geral obtemos o seguinte resultado, cujo nome é uma homenagem ao matemático francês Abraham De Moivre (1667-1754).

> **2 Teorema de De Moivre** Se $z = r(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$ e n for um inteiro positivo, então
>
> $$z^n = [r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Isso nos diz que *para elevar à* n*-ésima potência um número complexo elevamos à* n*-ésima potência o módulo e multiplicamos o argumento por* n.

EXEMPLO 6 □ Ache $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^{10}$.

SOLUÇÃO Uma vez que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1 + i)$, segue do Exemplo 4(a) que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ tem a forma polar

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Assim, pelo Teorema de De Moivre:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{10\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{2^5}{2^{10}}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{1}{32}i$$

O Teorema de De Moivre também pode ser usado para encontrar as n-ésimas raízes de números complexos. Uma n-ésima raiz de um número complexo z é um número complexo w tal que

$$w^n = z$$

Escrevendo esses dois números na forma polar como

$$w = s(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi) \qquad \text{e} \qquad z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

e usando o Teorema de De Moivre obtemos

$$s^n(\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi) = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

A igualdade desses dois números complexos mostra que

$$s^n = r \qquad \text{ou} \qquad s = r^{1/n}$$

e $$\cos n\phi = \cos \theta \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen} n\phi = \operatorname{sen} \theta$$

Do fato de que seno e cosseno têm período 2π segue que

$$n\phi = \theta + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Assim, $$w = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

Uma vez que dessa expressão resulta valores diferentes de w para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, temos o seguinte:

$\boxed{3}$ **Raízes de um Número Complexo** Seja $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e n um inteiro positivo. Então z tem as n raízes distintas

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

onde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Observe que cada uma das n raízes de z tem módulo $|w_k| = r^{1/n}$. Assim, todas as n raízes de z estão sobre o círculo de raio $r^{1/n}$ no plano complexo. Também, uma vez que o argumento de cada uma das n raízes excede o argumento da raiz anterior por $2\pi/n$, vemos que as n raízes de z são igualmente espaçadas sobre esse círculo.

EXEMPLO 7 Ache as seis raízes de $z = -8$ e faça um gráfico dessas raízes no plano complexo.

SOLUÇÃO Na forma polar, $z = 8(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$. Aplicando a Equação 3 com $n = 6$, obtemos

$$w_k = 8^{1/6}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)$$

Obtemos as seis raízes de -8 fazendo $k = 0, 1, 2, 3, 4$ e 5 nesta fórmula:

$$w_0 = 8^{1/6}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right)$$

$$w_1 = 8^{1/6}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\, i$$

$$w_2 = 8^{1/6}\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right)$$

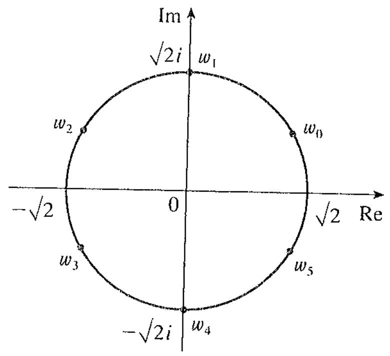


FIGURA 9
As seis raízes de $z = -8$

$$w_3 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$w_4 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}\,i$$

$$w_5 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

Todos esses pontos estão sobre o círculo de raio $\sqrt{2}$, como na Figura 9.

Exponencial Complexa

Precisamos também dar um significado para a expressão e^z quando $z = x + iy$ for um número complexo. A teoria das séries infinitas desenvolvida no Capítulo 11 (Volume II) pode ser estendida para o caso onde os termos são números complexos. Usando a série de Taylor para e^x (11.10.11) como guia definimos

4 $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

e resulta que essa função exponencial complexa tem as mesmas propriedades que a função exponencial real. Em particular, é verdade que

5 $$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

Se fizermos $z = iy$, onde y é um número real, na Equação 4, e usarmos o fato de que

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \ldots$$

obteremos
$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos y + i\,\text{sen}\,y \end{aligned}$$

Usamos aqui as séries de Taylor para seno e cosseno (Equações 11.10.15 e 11.10.16 do Volume II). O resultado é a famosa fórmula chamada de **fórmula de Euler**:

6 $$\boxed{e^{iy} = \cos y + i\,\text{sen}\,y}$$

Combinando a fórmula de Euler com a Equação 5 obtemos

7 $$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\,\text{sen}\,y)$$

EXEMPLO 8 Calcule: (a) $e^{i\pi}$ (b) $e^{-1+i\pi/2}$

SOLUÇÃO

(a) Da Equação de Euler (6) temos

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1 + i(0) = -1$$

(b) Usando a Equação (7) obtemos

$$e^{-1+i\pi/2} = e^{-1}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{e}[0 + i(1)] = \frac{i}{e}$$

Finalmente, notamos que a equação de Euler nos fornece um meio mais fácil de provar o Teorema de De Moivre:

$$[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

G Exercícios

1–14 Calcule a expressão e escreva sua resposta na forma $a + bi$.

1. $(3 + 2i) + (7 - 3i)$ **2.** $(1 + i) - (2 - 3i)$

3. $(3 - i)(4 + i)$ **4.** $(4 - 7i)(1 + 3i)$

5. $\overline{12 + 7i}$ **6.** $\overline{2i(\frac{1}{2} - i)}$

7. $\dfrac{2 + 3i}{1 - 5i}$ **8.** $\dfrac{5 - i}{3 + 4i}$

9. $\dfrac{1}{1 + i}$ **10.** $\dfrac{3}{4 - 3i}$

11. i^3 **12.** i^{100}

13. $\sqrt{-25}$ **14.** $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

15–17 Determine o complexo conjugado e o módulo do número dado.

15. $3 + 4i$ **16.** $\sqrt{3} - i$ **17.** $-4i$

18. Prove as seguintes propriedades dos números complexos:
(a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ (b) $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$
(c) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$, onde n é um inteiro positivo
[*Sugestão:* Escreva $z = a + bi$, $w = c + di$.]

19–24 Determine todas as soluções da equação.

19. $4x^2 + 9 = 0$ **20.** $x^4 = 1$

21. $x^2 - 8x + 17 = 0$ **22.** $x^2 - 4x + 5 = 0$

23. $z^2 + z + 2 = 0$ **24.** $z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} = 0$

25–28 Escreva o número na forma polar com argumento entre 0 e 2π.

25. $-3 + 3i$ **26.** $1 - \sqrt{3}i$ **27.** $3 + 4i$ **28.** $8i$

29–32 Determine a forma polar para zw, z/w e $1/z$ colocando primeiro z e w na forma polar.

29. $z = \sqrt{3} + i$, $w = 1 + \sqrt{3}i$

30. $z = 4\sqrt{3} - 4i$, $w = 8i$

31. $z = 2\sqrt{3} - 2i$, $w = -1 + i$

32. $z = 4(\sqrt{3} + i)$, $w = -3 - 3i$

33–36 Determine as potências indicadas usando o Teorema de De Moivre.

33. $(1 + i)^{20}$ **34.** $(1 - \sqrt{3}i)^5$ **35.** $(2\sqrt{3} + 2i)^5$ **36.** $(1 - i)^8$

37–40 Determine as raízes indicadas. Esboce as raízes no plano complexo.

37. As raízes oitavas de 1 **38.** As raízes quintas de 32

39. As raízes cúbicas de i **40.** As raízes cúbicas de $1 + i$

41–46 Escreva o número na forma $a + bi$.

41. $e^{i\pi/2}$ **42.** $e^{2\pi i}$ **43.** $e^{i3\pi/4}$

44. $e^{-i\pi}$ **45.** $e^{2+i\pi}$ **46.** e^{1+2i}

47. Se $u(x) = f(x) + ig(x)$ for uma função a valores complexos de uma variável real x e as partes real e imaginária $f(x)$ e $g(x)$ forem funções diferenciáveis de x, então a derivada de u está definida como sendo $u'(x) = f'(x) + ig'(x)$. Use isso junto com a Equação 7 para provar que se $F(x) = e^{rx}$, então $F'(x) = re^{rx}$ quando $r = a + bi$ for um número complexo.

48. (a) Se u for uma função a valores complexos de uma variável real, sua integral indefinida $\int u(x)\,dx$ é uma antiderivada de u. Calcule

$$\int e^{(1+i)x}\,dx$$

(b) Considerando as partes real e imaginária da integral da parte (a), calcule as integrais reais

$$\int e^x \cos x\,dx \quad \text{e} \quad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

Compare com o método usado no Exemplo 4 da Seção 7.1.