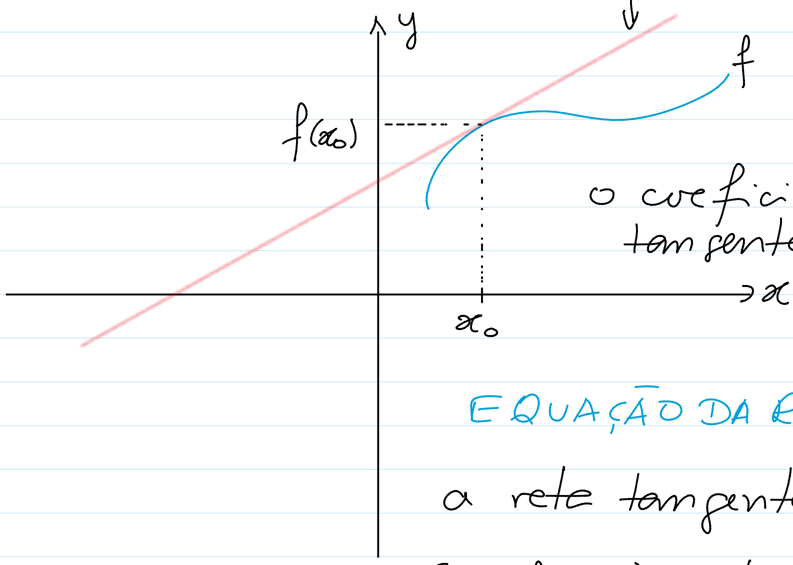
30-06-2020

terça-feira, 30 de junho de 2020 18:57

Derivadas



é a reta tangente ao gráfico da f no ponto $(x_0, f(x_0))$

o coeficiente angular da reta tangente é a derivada da f no ponto x_0

EQUAÇÃO DA RETA TANGENTE

a reta tangente passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ e tem $f'(x_0)$ como coeficiente angular

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \Rightarrow y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Se $\boxed{f \text{ é derivável}}$ em x_0, então $\boxed{f \text{ é contínua}}$ em x_0.
A recíproca não é verdadeira, isto é, se f é contínua em x_0, então f não necessariamente é derivável em x_0

OBS: Se f não é contínua em x_0, então f não é derivável em x_0

Seja por f derivável em x_0, então

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Quero mostrar que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0), \quad \forall x \in D_f, x \neq x_0$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left[f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right]$$

$$\underset{x \neq x_0}{} = f(x_0) + \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)\cdot 0 = f(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f \text{ é contínua em } x_0$$

Contra-exemplo: $f(x) = |x|$. Mostremos que f é contínua em $x_0 = 0$, mas não derivável em $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = |0| = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

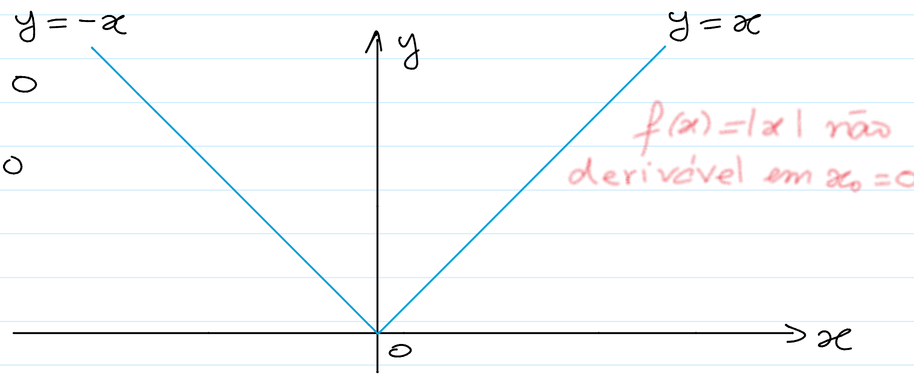
$$\boxed{\begin{array}{l} |x| = x, \text{ se } x \geq 0 \\ |x| = -x, \text{ se } x < 0 \end{array}}$$

$$\neq \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} \text{ não existe}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$\therefore$ $f(x) = |x|$ $\boxed{\text{não é derivável}}$ em $x_0 = 0$, $\boxed{\text{mas é contínua}}$ em $x_0 = 0$.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



f é contínua, $\forall x \in \mathbb{R}$

Temos

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Chamando $\boxed{h = x - x_0}$, então $\boxed{x = x_0 + h}$

Se $\boxed{x \to x_0}$, então $\boxed{h \to 0}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

FUNÇÃO DERIVADA

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$, a função derivada é dada por $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$, onde $D_{f'} \subset D_f$ e

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Exemplos: 1) $f(x) = k$ uma constante

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

2) $f(x) = x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1$$

conjunto dos números naturais

3) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

temos que $f'(x) = n x^{n-1}$ (regra do tombo)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$(x+h)^n = x^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^i$$

binômio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i =$$

$$= \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} a^n + \underbrace{\binom{n}{1}}_{=n} a^{n-1} b +$$

$$+ \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Σ é a letra grega maiúscula sigma (minúscula σ) que é usada na matemática como símbolo de somatória

$\binom{n}{i}$ é número binomial, é definido por $\binom{n}{i} = \frac{n!}{\ldots}$

$\binom{n}{k}$ é número binomial, é definido por $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Definimos: $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2.1$, $3! = 3.2.1$,

$$n! = n\,(n-1).\,(n-2)\ldots 2.1$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1, \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$$

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\cancel{x^n} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}h^i - \cancel{x^n}}{h} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}h^i}{h}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}h^{i-1} = \binom{n}{1}x^{n-1} + \sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}h^{i-1}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}h^{i-1}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \binom{n}{3}x^{n-3}h^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x\,h^{n-2} + \binom{n}{n}h^{n-1}\right]$$

$$= \binom{n}{1}x^{n-1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!}x^{n-1} = \frac{n\,(n-1)!}{(n-1)!}x^{n-1} = n\,x^{n-1}$$

$\therefore\ f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n\,x^{n-1}$

4) $f(x) = \operatorname{sen} x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \operatorname{sen} b \cos a \\ \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{cases}$$

$$\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x = \operatorname{sen}x\cos h + \operatorname{sen}h\cos x - \operatorname{sen}x$$
$$= \operatorname{sen}x(\cos h - 1) + \operatorname{sen}h\cos x$$

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h} = \operatorname{sen}x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \frac{\operatorname{sen}h}{h}\cos x$$

Sabemos que: $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}h}{h} = 1$ e $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h} =$$

$$= \operatorname{sen}x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{=0} + \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h}{h}}_{=1} \cdot \cos x = \cos x$$

$\therefore \quad f(x) = \operatorname{sen}x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

5) $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}x$

Resumo: 1) $f(x) = k$ (função constante) $\Rightarrow f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

3) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

4) $f(x) = \operatorname{sen}x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

5) $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}x$

Proposição: Suponhamos que f e g são deriváveis em x_0, então $f+g$, $f-g$, kf, $f\cdot g$ e $\frac{f}{g}$ se $g(x_0)\neq 0$, são deriváveis em x_0 e: (Regras de derivações)

1) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,

2) $(kf)'(x_0) = k f'(x_0)$,

3) $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$,

4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(ku)' = ku'$

3) $(uv)' = u'v + uv'$

4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exercícios: Derivar

1) $p(x) = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + \dots + a_n x^n$

$p'(x) = 0 + a_1 . 1 + a_1 2 x^{2-1} + \dots + a_n n x^{n-1}$

$= a_1 + 2a_1 x + 3a_2 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1}$

2) $p(x) = 2 - 3x^2 + 4x^5 - x^6$

$p'(x) = -6x + 20x^4 - 6x^5$

$sen^n x = (sen x)^n$

$cos^n x = (cos x)^n$

3) $f(x) = tg x = \frac{sen x}{cos x}$

$$f'(x) = \frac{(sen x)' cos x - sen x (cos x)'}{(cos x)^2}$$

$$= \frac{cos x \, cos x + sen x \, sen x}{cos^2 x} = \frac{cos^2 x + sen^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x$$

$\Rightarrow f(x) = tg x \Rightarrow f'(x) = sec^2 x$

4) $f(x) = sec x = \frac{1}{cos x}$

$$f'(x) = \frac{1' . cos x - 1 . (cos x)'}{(cos x)^2} = \frac{0 . cos x + sen x}{cos^2 x} = \frac{sen x}{cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{cos x} \cdot \frac{sen x}{cos x} = sec x \, tg x$$

$\Rightarrow f(x) = sec x \Rightarrow f'(x) = sec x \, tg x$

Recordar função logaritmo

Seja $f: A \to B$ uma função. Dizemos que f é inversível

Recordar função logaritmo

Seja $f: A \to B$ uma função. Dizemos que f é invertível se existe $g: B \to A$ tal que

$$f(g(b)) = b, \quad \forall b \in B$$

$$g(f(a)) = a, \quad \forall a \in A$$

g é chamada de inversa de f, se existe ela é única, usamos a notação: $g = f^{-1}$

Teorema: Seja $f: A \to B$ uma função. Então f é invertível se e somente se f é bijetora

f é bijetora $\iff$ f é injetora e sobrejetora

$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

$\operatorname{Im} f = B$

$\{f(a) \in B \mid a \in A\}$

f é bijetora $\Rightarrow$ existe f^{-1}. Definimos

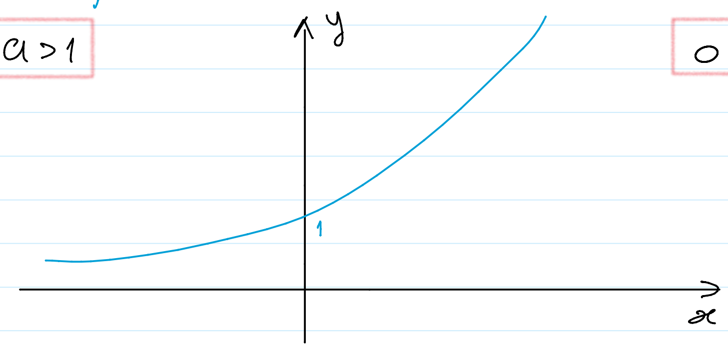
$$\boxed{b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)}$$

$a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$

$$f(x) = a^x, \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\} = \operatorname{Im} f$$

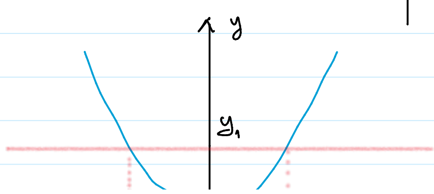
f é bijetora

$\boxed{a > 1}$



$\boxed{0 < a < 1}$

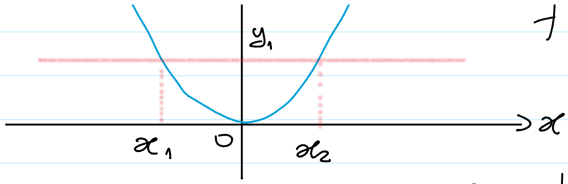
$f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$f(x_1) = y_1 = f(x_2)$

$f(x) = x^2 \ , \ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

não injetora e nem sobrejetora



$f(x_1) = y_1 = f(x_2)$

$x_1 \neq x_2$

exemplo: $f(-1) = 1 = f(1)$

$Im f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} \subsetneq \mathbb{R}$

$a > 0, \ a \neq 1, \quad f(x) = a^x, \ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é bijetora

logo f tem inversa, $f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

notação $f^{-1}(x) = \log_a x$

$$b = f(c) \iff c = f^{-1}(b)$$

$$\boxed{b = a^c \iff c = \log_a b}$$

$$\boxed{\log_a b = c \iff a^c = b} \qquad b > 0$$

$$f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \ f(x) = \log_a x$$

$x > 0$ e $a > 0$ e $a \neq 1$