MAT 1513 - Laboratório de Matemática - 1o Semestre 2020

Profa. Daniela - Licenciatura Noturno

SÉTIMA LISTA DE EXERCÍCIOS

(1) Determine:

(a) a forma polar de $(\sqrt{3}+i)\cdot(1+\sqrt{3}i)$; $\dfrac{4\sqrt{3}-4i}{8i}$; $\dfrac{1}{-1+i}$.

(b) as partes reais e imaginárias dos números $(1+i)^{20}$; $(-2+2\sqrt{3}i)^5$.

(2) Sejam z e w números complexos. Mostre que:

(a) $\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ **(b)** $\mathrm{Im}(z) \leq |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$ **(c)** $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

(d) $\overline{z\cdot w} = \overline{z}\cdot\overline{w}$ **(e)** $\bar{\bar{z}} = z$ **(f)** $|z| = |\bar{z}|$ **(g)**$|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$

(3) Mostre que

(a) $|(2\bar{z}+5)\cdot(\sqrt{2}-i)| = \sqrt{3}|2z+5|$, para todo $z \in \mathbb{C}$ **(b)** $(-1+i)^7 = -8(1+i)$

(4) Determine as soluções, em $\mathbb{C}$, de cada equação:

(a) $\bar{z} = z^2$ **(b)** $z^2 - 4iz - 4 - 2i = 0$

(5) Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$ dois números complexos. Que condições devemos ter sobre a, b, c e d para que $z + w$ e $z \cdot w$ sejam ambos números reais?

(6) Determine o valor de cada expressão

(a) $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{1001}$ **(b)** $(1+i)^{12} - (1-i)^{-12}$

(7) Determine todos os números naturais n que cumprem cada uma das equações abaixo

(a) $(2i)^n + (1+i)^{2n} + 16i = 0$ **(b)** $i^n + i^{-n} = 0$.

(8) Determine todos $a \in \mathbb{R}$ que cumprem $(a+i)^4 \in \mathbb{R}$.

(9) Determine e represente geometricamente

(a) as raízes quadradas de $1 - i\sqrt{3}$ **(b)** as raízes cúbicas de -27

(c) as raízes sextas de i.

(10) (FUVEST 2020, 2ª fase)

(a) Considere o conjunto formado pelos números complexos z que cumprem a condição $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$. Cada elemento desse conjunto será objeto da transformação que leva um número complexo em seu conjugado. Represente no plano complexo (ou plano de Argand-Gauss) o conjunto resultante após essa transformação.

(b) Determine o lugar geométrico dos pontos z do plano complexo tais que $z \neq -1$ e para os quais $\dfrac{z-1}{z+1}$ é um número imaginário puro.

(c) Determine as partes reais de todos os números complexos z tais que as representações de z, i e 1 no plano complexo sejam vértices de um triângulo equilátero.