Algumas soluções - Lista 7

Cálculo - FAU

Monitora - Juliane Trianon Fraga

Exercício 4:

Vamos calcular as derivadas de primeira, segunda e terceira ordem de $y = \dfrac{1}{x}$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -(-2)\frac{1}{x^3} = \frac{2}{x^3}$$

e

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2 \cdot (-3)\frac{1}{x^4} = -\frac{6}{x^4}.$$

Portanto, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{6}{x^2} = 6\frac{dy}{dx}.$$

Exercício 7:

Pela regra da cadeia, $g'(t) = f'(t^2+1)(2t)$. Para $t = 1$, obtemos

$$g'(1) = 2f'(2) = 10.$$

Exercício 8:

(i) Vamos usar a regra da cadeia duas vezes neste item. Para isso, definamos as funções $f(u) = u^3$, para $u \in \mathbb{R}$, $g(t) = \ln t$, para $t > 0$ e $h(x) = x^2 + 1$, para $x \in \mathbb{R}$. Queremos derivar a função $(f \circ (g \circ h))(x) = [\ln(x^2+1)]^3$. A regra da cadeia aplicada à primeira composição dá:

$$(f \circ (g \circ h))'(x) = f'((g \circ h)(x))(g \circ h)'(x).$$

Agora, calculamos a derivada da segunda composição, também pela regra da cadeia:

$$(g \circ h)'(x) = g'(h(x))h(x).$$

Juntando esse cálculo ao anterior, obtemos

$$(f \circ (g \circ h))'(x) = f'((g \circ h)(x))g'(h(x))h'(x).$$

Resta agora calcular as derivadas de f, g e h e aplicá-las aos pontos adequados. Como $f'(u) = 3u^2$, $g'(t) = \dfrac{1}{t}$ e $h(x) = 2x$, obtemos, finalmente

$$(f \circ (g \circ h))'(x) = 3[\ln\big(x^2+1\big)]^2 \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{6x}{x^2+1}[\ln\big(x^2+1\big)]^2.$$

Exercício 10:

Calculemos a derivada de f utilizando a regra do produto e a regra da cadeia:

$$f'(x) = g(x^2) + xg'(x^2)2x = g(x^2) + 2x^2g'(x^2),$$

para $x \in \mathbb{R}$. Colocando $x = 1$, obtemos

$$f'(1) = g(1) + 2g'(1) = 8.$$

Exercício 12:

Quando queremos derivar uma função da forma $f(x)^{g(x)}$, a ideia é escrevê-la como $e^{g(x)\ln(f(x))}$, e então utilizar normalmente as regras de derivação já aprendidas.

(h) Neste caso, escrevemos, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$y = (2 + \operatorname{sen} x)^{\cos 3x} = e^{\cos 3x(\ln(2+\operatorname{sen} x))}.$$

Agora derivamos utilizando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= e^{\cos 3x(\ln(2+\operatorname{sen} x))} \cdot (\cos 3x(\ln(2+\operatorname{sen} x)))' \\ &= (2+\operatorname{sen} x)^{\cos 3x} \cdot (\cos 3x(\ln(2+\operatorname{sen} x)))'.\end{aligned}$$

Resta, portanto, calcularmos a derivada $(\cos 3x(\ln(2+\text{ sen } x)))'$, utilizando também a regra da cadeia e a regra do produto:

$$
\begin{aligned}
(\cos 3x(\ln(2+\text{ sen } x)))' &= 3\cdot(-\text{ sen } 3x)(\ln(2+\text{ sen } x)) + \cos 3x(\ln(2+\text{ sen } x))' \\
&= 3\cdot(-\text{ sen } 3x)(\ln(2+\text{ sen } x)) + \cos 3x\left(\frac{1}{(2+\text{ sen } x)}\cos x\right) \\
&= -3\text{ sen } 3x\ln(2+\text{ sen } x) + \frac{\cos x\cos 3x}{2+\text{ sen } x}.
\end{aligned}
$$

Obtemos, finalmente, que

$$\frac{dy}{dx} = (2+\text{ sen } x)^{\cos 3x}\cdot\left[-3\text{ sen } 3x\ln(2+\text{ sen } x) + \frac{\cos x\cos 3x}{2+\text{ sen } x}\right].$$

O exemplo 3 da página 184 do Guidorizzi mostra que, para qualquer constante real c e $x>0$,

$$(x^c)' = cx^{c-1},$$

a mesma expressão que tínhamos conhecimento para números racionais. Portanto, a *regra do tombo* também vale para números irracionais, fato que será usado na resolução do item seguinte.

(l) Pela observação acima, $(x^\pi)' = \pi x^{\pi-1}$, para $x>0$. Escrevendo também, para $x>0$,

$$\pi^x = e^{x\ln\pi},$$

obtemos que

$$\frac{dy}{dx} = \pi x^{\pi-1} + e^{x\ln\pi}\ln\pi = \pi x^{\pi-1} + \ln\pi\cdot\pi^x.$$

Exercício 14:

(a) $\mathrm{d}A = 2l\,\mathrm{d}l$.

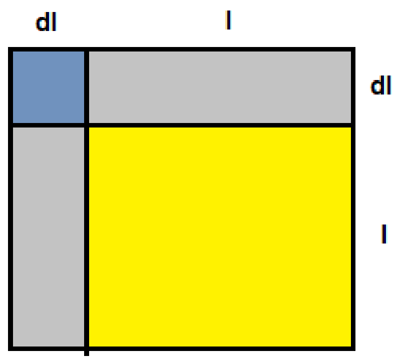
(b) O diferencial dA é uma aproximaçao de $\Delta A = A(l+dl) - A(l)$, para algum l fixo e um acréscimo dl. Veja que, para todo $l>0$ e acréscimo $\mathrm{d}l$,

$$\Delta A = (l+\mathrm{d}l)^2 - l^2 = 2l\,\mathrm{d}l + (\mathrm{d}l)^2.$$

O erro $(\Delta A - \mathrm{d}A)$ que se comete é, portanto,

$$\Delta A - \mathrm{d}A = (\mathrm{d}l)^2.$$

Olhando para a função $A(l)$ como a área de um quadrado de lado l, o erro é representado pela região azul da figura abaixo. Note que a região amarela representa a área do quadrado de lado l e a soma das regiões em cinza representa dA (que difere de ΔA por dl^2).



Exercício 15:

A equação da reta tangente ao gráfico de uma função f (derivável no ponto p) no ponto $(p, f(p))$ é, por definição,

$$y - f(p) = f'(p)(x - p).$$

Se $f'(p) \neq 0$, a equação da reta normal ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ é

$$y - f(p) = -\frac{1}{f'(p)}(x - p).$$

(a) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - 3$. Portanto, $f'(0) = -3$. Substituindo os valores correspondentes nas equações acima, obtemos que a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto 0 é

$$y - 0 = (-3)(x - 0),$$

isto é, $y = -3x$. A equação da reta normal neste mesmo ponto é

$$y = \frac{x}{3}.$$

Exercício 17:

Primeiramente, observemos que uma tal reta não pode ser vertical nem horizontal, pois nesses casos ela não seria perpendicular à reta $2y+x=3$. O seu coeficiente angular m é, portanto, não-nulo. A condição de perpendicularismo nos dá, nessas condições, que o produto de m pelo coeficiente angular de $2y+x=3$ deve ser -1, ou seja,

$$-\frac{m}{2}=-1,$$

donde obtemos $m=2$.

Agora observe que, como a reta pedida deve ser tangente ao gráfico de f em algum ponto x_0, temos que, para tal x_0, $m=f'(x_0)$ (lembre-se de que a derivada de uma função em um ponto é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função neste mesmo ponto). Nesse caso,

$$m=2=2x_0-3,$$

e assim $x_0=\frac{5}{2}$. Dessa forma, concluímos que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $\frac{5}{2}$,

$$y-f\left(\frac{5}{2}\right)=2\left(x-\frac{5}{2}\right),$$

ou seja, $y=2x-\frac{25}{4}$, é a reta procurada.

Exercício 20:

(d) Vamos primeiro calcular a derivada da função $x(t)$, definida nos reais:

$$x'(t)=\frac{(1+t^2)-2t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}.$$

Como $(1+t^2)^2>0$ para todo $t\in\mathbb{R}$, o sinal de $x'(t)$ depende apenas do seu numerador, $(1-t^2)$. É fácil ver, portanto, que

$$x'(t)>0 \text{ se } t<-1 \text{ ou } t>1$$

e

$$x'(t)<0 \text{ se } -1<t<1.$$

Sendo x contínua em $\mathbb{R}$, isso significa que x é estritamente crescente para $t<-1$ ou $t>1$ e é estritamente decrescente para $-1<t<1$.

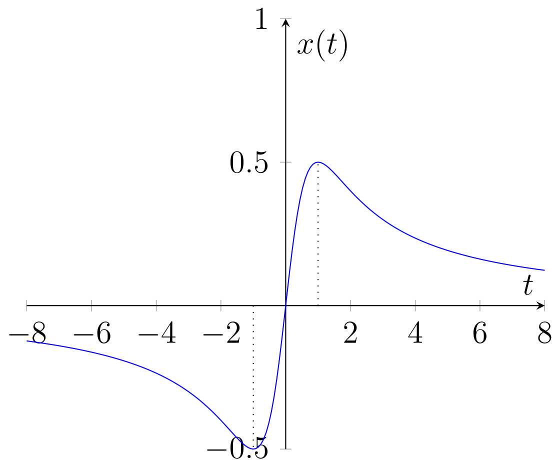
Os limites de x quando t tende a ∞ ou $-\infty$ são

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{1+t^2} = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\frac{1}{t^2}+1} \right] = 0$$

e

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{t}{1+t^2} = \lim_{t\to-\infty} \left[\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\frac{1}{t^2}+1} \right] = 0.$$

Podemos, finalmente, esboçar o gráfico:



Exercício 21:

(c) Fazendo $u = \frac{1}{x}$, temos que quando $x \to 0^+$, $u \to \infty$ e podemos escrever, para todo $x > 0$,

$$xe^{\frac{1}{x}} = \frac{e^u}{u},$$

e portanto

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to\infty} \frac{e^u}{u} = \infty,$$

de acordo com o exemplo 6 da página 232 do Guidorizzi (ou pela 2ª Regra de L'Hospital).

(e) Fazendo $u = \ln x$, temos que quando $x \to \infty$, $u \to \infty$, e assim, para todo $x > 0$ podemos escrever

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{u}{e^u},$$

e portanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{u\to\infty} \frac{u}{e^u} = 0.$$

Exercício 23:

(a) Definamos, para $x \geq 0$, a função $f(x) = e^x - x - 1$. Sendo f contínua para todo $x \geq 0$ e tendo em vista que $f'(x) = e^x - 1 > 0$ para todo $x > 0$, concluímos que f é estritamente crescente em $[0, \infty[$. Portanto, se $x > 0$,

$$f(x) = e^x - x - 1 > f(0) = 0,$$

ou seja, $e^x > x + 1$.