MAP2110 - Notas de aula e exercícios

Apostol Cap 12 - 12.8, 12.9, 12.10, 12.11

Saulo R. M. Barros

Departamento de Matemática Aplicada - IME-USP

Alguns Exercícios : 12.8.

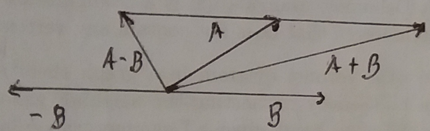
3) $A.B = A.C \quad , A \neq 0 \quad \Longrightarrow B = C?$

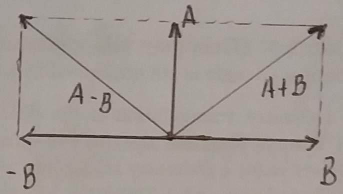
$$A.(B-C) = 0$$

19) $\|A+B\|^2 - \|A-B\|^2 = \|A\|^2 + 2A.B + \|B\|^2 - (\|A\|^2 - 2A.B + \|B\|^2)$

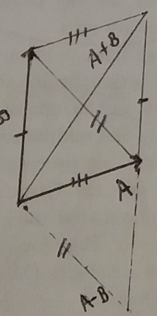
$$= 4A.B.$$

Portanto $\|A+B\| = \|A-B\| \longleftrightarrow A.B = 0$

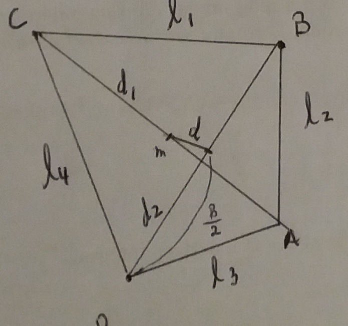




20) $\|A+B\|^2 + \|A-B\|^2 = 2\|A\|^2 + 2\|B\|^2$



21)



Então: $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4d^2$

$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 = \|B-C\|^2 + \|B-A\|^2 + \|A\|^2 + \|C\|^2$

$= 2(\|B\|^2 + \|C\|^2 + \|A\|^2) - 2B.C - 2A.B$

$d_1^2 + d_2^2 + 4d^2 = \|A-C\|^2 + \|B\|^2 + 4\left\|\frac{B}{2} - \frac{A+C}{2}\right\|^2$

$= \|A\|^2 - 2A.C + \|C\|^2 + \|B\|^2 + \|B - (A+C)\|^2$

$= \|A\|^2 - 2A.C + \|C\|^2 + \|B\|^2 + \|B\|^2 - 2A.B - 2B.C$
$+ \|A\|^2 + 2A.C + \|C\|^2$

$= 2(\|A\|^2 + \|B\|^2 + \|C\|^2) - 2A.B - 2B.C$

Os vetores unitários $E_1=(1,0\ldots0), \ldots, E_n(0,\ldots0,1)$ compõe os "vetores de coordenadas (note que $E_i \cdot E_j = 0$).

$\|E_i\|=1$ e todo vetor $V=(v_1,\ldots v_n) \in V_n$ pode ser escrito como $v_1E_1+v_2E_2+\ldots+v_nE_n$. (esta representação é única).

Dizemos que V se expressa como <u>combinação linear</u> dos vetores $E_1,\ldots,E_n$. Note que qualquer vetor $A \in V_n$ pode ser escrito como combinação linear dos E_i, $i=1,\ldots n$.

Dizemos que o conjunto de vetores $E_1,\ldots E_n$ <u>gera</u> o espaço V_n (sendo cada vetor gerado de forma única).

Em V_3 costuma-se também usar a notação:

$\{E_1,E_2,E_3\} = \{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.

Se $A=(a_1,\ldots a_n)$ e $B=(b_1,\ldots b_n)$, ou seja,

$A=\sum a_iE_i$ e $B=\sum b_iE_i$ então $A+B=\sum(a_i+b_i)E_i$

Um conjunto de vetores que gera o espaço V_n de maneira única é chamado <u>base</u> de V_n.

Os vetores unitários $E_1=(1,0\dots 0), \dots, E_n(0,\dots 0,1)$ compõe os "vetores de coordenadas (note que $E_i \cdot E_j = 0$).

$\|E_i\|=1$ e todo vetor $V=(v_1,\dots v_n) \in V_n$ pode ser escrito como $v_1 E_1 + v_2 E_2 + \dots + v_n E_n$. (esta representação é única).

Dizemos que V se expressa como <u>combinação linear</u> dos vetores $E_1, \dots, E_n$. Note que qualquer vetor $A \in E_n$ pode ser escrito como combinação linear dos E_i, $i=1,\dots n$.

Dizemos que o conjunto de vetores $E_1, \dots E_n$ <u>gera</u> o espaço V_n (sendo cada vetor gerado de forma única).

Em V_3 costuma-se também usar a notação:

$\{E_1, E_2, E_3\} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

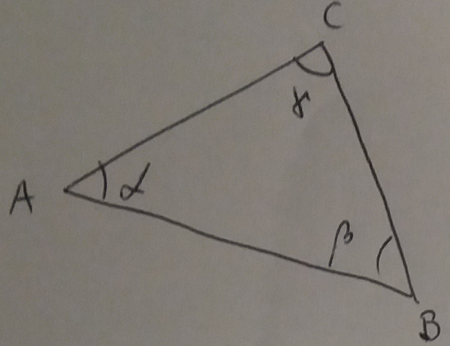
Se $A=(a_1,\dots a_n)$ e $B=(b_1,\dots b_n)$, ou seja,

$A=\sum a_i E_i$ e $B=\sum b_i E_i$ então $A+B = \sum (a_i+b_i) E_i$

Um conjunto de vetores que gera o espaço V_n de maneira única é chamado <u>base</u> de V_n.

Exercícios (12.11)

5) Triângulo com vértices nos pontos $A=(2,-1,1)$, $B=(1,3,-5)$, $C=(3,-4,-4)$ em $\mathbb{R}^3$. Determinar os ângulos internos do triângulo.



$A \cdot B = 0$, $B \cdot C = 35$, $A \cdot C = 6$, $A \cdot A = 6$

$B \cdot B = 35$ $C \cdot C = 41$

$C-A = (1,-3,-5)$ $\|C-A\| = \sqrt{35}$

$B-A = (-1,-2,-6)$ $\|B-A\| = \sqrt{41}$

$C-B = (2,-1,1)$ $\|C-B\| = \sqrt{6}$

Ângulo α: $(C-A)\cdot(B-A) = \|C-A\|\|B-A\| \cos\alpha$

$$\underset{35}{\overset{\shortparallel}{}} = \sqrt{35}\cdot\sqrt{41} \cos\alpha$$

$$\therefore \alpha = \arccos\sqrt{\frac{35}{41}}$$

Ângulo β: $(A-B)\cdot(C-B) = \|A-B\|\|C-B\| \cos\beta$

$$\underset{6}{\overset{\shortparallel}{}} = \sqrt{41}\sqrt{6} \cos\beta$$

$$\therefore \beta = \arccos\sqrt{\frac{6}{41}}$$

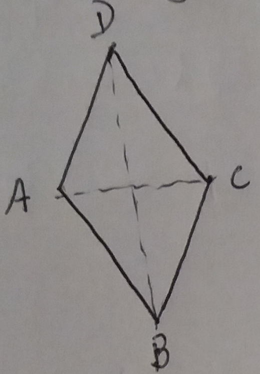
Ângulo γ: $(A-C)\cdot(B-C) = \|A-C\|\|B-C\| \cos\gamma$

$$\underset{0}{\overset{\shortparallel}{}}$$

$$\therefore \gamma = \arccos 0 \rightarrow \gamma = \pi/2$$

O Triângulo é retângulo com $\alpha \sim \pi/8$ e $\beta \sim \frac{3\pi}{8}$.

11) Perpendicularidade das diagonais de um losango.



Diagonais são perpendiculares se

$(C-A).(D-B)=0$, ou seja,

se $C.D + A.B - A.D - B.C = 0$

Um losango é caracterizado por ter os quatro lados de mesmo comprimento:

$$\|A-B\|^2 = \|B-C\|^2 = \|D-C\|^2 = \|D-A\|^2$$

Calculando

$$\|D-A\|^2 + \|B-C\|^2 - \|A-B\|^2 - \|D-C\|^2 = 0$$

$$= \cancel{\|D\|^2} + \cancel{\|A\|^2} - 2A.D + \|B\|^2 + \cancel{\|C\|^2} - 2B.C - \left(\cancel{\|A\|^2} + \|B\|^2 - 2A.B + \cancel{\|D\|^2} + \cancel{\|C\|^2} - 2D.C\right)$$

$$= 2(A.B + D.C - A.D - B.C) = 0$$

que é a condição para ortogonalidade das diagonais.