25-06-2020

quinta-feira, 25 de junho de 2020 18:53

Teorema do confronto ou Teorema do sanduiche

Sejam $f, g, h : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ponto de acumulação de D e $L \in \mathbb{R}$

Suponhamos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$ e que existe $r > 0$ tal que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo $x \in D$ com $0 < |x - x_0| < r$. Então $\lim_{x \to x_0} h(x) = L$

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

$$L$$

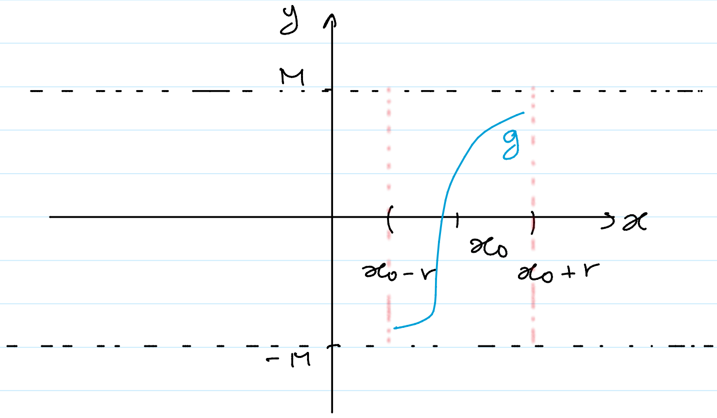
Exercício: Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ponto de acumulação de D. Se $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = 0}$ e $\boxed{g \text{ é limitada}}$ em torno de x_0. Então

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = 0}$$

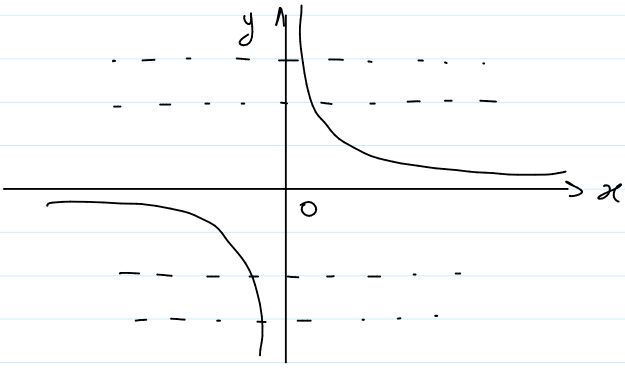
Dizemos g é limitada em torno de x_0 se existe $M > 0$ e $r > 0$

$|g(x)| \leq M$, $\forall x \in D$ com $0 < |x - x_0| < r$

$$|g(x)| \leq M \iff -M \leq g(x) \leq M$$



$g(x) = \frac{1}{x}$, não é limitada em torno de $x_0 = 0$



$y = \operatorname{sen} x$ é limitada em torno de x_0, para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$

pois $|\operatorname{sen} x| \le 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Analogamente a função cosseno

$\boxed{a \le b \text{ e } c > 0 \implies ac \le bc}$

voltando para o exercício

$$\boxed{|g(x)| \le M \leftarrow g \text{ é limitada}}$$

$$\implies |g(x)||f(x)| \le M|f(x)|$$

$$\implies |g(x)f(x)| \le M|f(x)|$$

$$\implies -M|f(x)| \le g(x)f(x) \le M|f(x)|$$

Como $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = 0}$, então $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$,

logo $\lim_{x \to x_0} M|f(x)| = M \lim_{x \to x_0} |f(x)| = M.0 = 0$

$$\lim_{x \to x_0} (-M|f(x)|) = 0$$

Pelo Teorema do Sanduíche, $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$

$$-M|f(x)| \le f(x)g(x) \le M|f(x)|$$

0

limite

Exercício: 1) $\lim_{x\to 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

limitada

notemos que $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ não existe

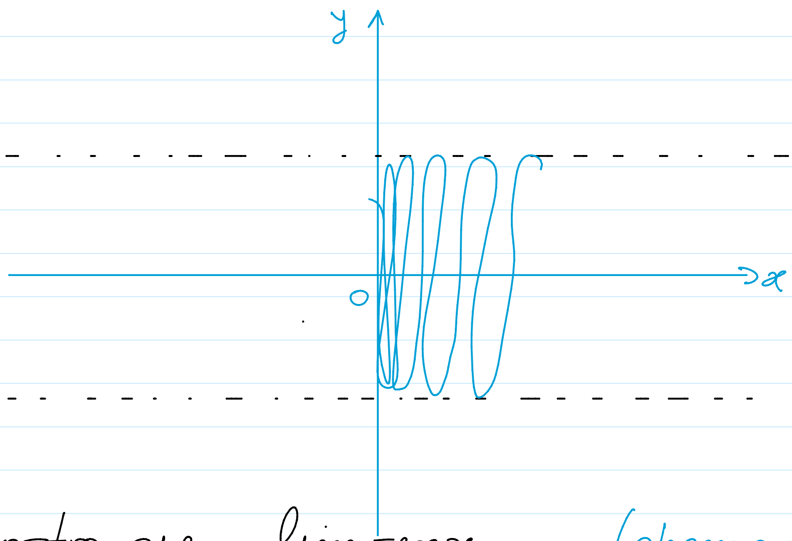
$x = \frac{1}{2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$; $k \to +\infty$, $k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x \to 0$

$$\lim_{k\to+\infty} \cos(2k\pi) = 1$$

$x = \frac{1}{\pi + 2k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}$; $k\to+\infty$, $k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\to 0$

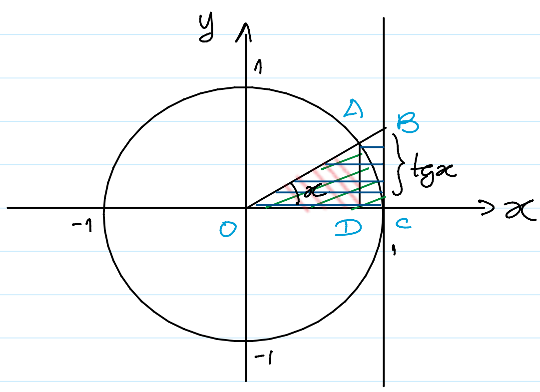
$$\lim_{k\to+\infty} \cos(\pi + 2k\pi) = -1$$

$x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$, $\lim_{k\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$



2) Mostre que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (chamado de limite fundamental)

$0 < x < \frac{\pi}{2}$



área do ΔAOD < área do setor circular AOD < área do ΔCOB

área do $\Delta AOD = \dfrac{\cos x \,\mathrm{sen}\, x}{2}$

área do setor circular $AOD = \dfrac{x}{2}$

área do $\Delta COB = \dfrac{1 \cdot \mathrm{tg}\, x}{2}$

$$\frac{\cos x \,\mathrm{sen}\, x}{2} < \frac{x}{2} < \mathrm{tg}\, x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x \,\mathrm{sen}\, x < x < \frac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x} \overset{\mathrm{sen}\, x > 0}{\Rightarrow} \cos x < \frac{x}{\mathrm{sen}\, x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{x}{\mathrm{sen}\, x} \Rightarrow \frac{\mathrm{sen}\, x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{x}{\mathrm{sen}\, x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\mathrm{sen}\, x}{x}$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\mathrm{sen}\, x}{x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{com } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \boxed{\cos x < \frac{\mathrm{sen}\, x}{x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \text{com } 0 < x < \frac{\pi}{2}}$$

Consideremos $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, então $0 < -x < \frac{\pi}{2}$

logo $\cos(-x) < \dfrac{\mathrm{sen}(-x)}{-x} < \dfrac{1}{\cos(-x)}$

A função cosseno é uma função par e a função seno é uma função ímpar, então

$$\cos x < \frac{-\mathrm{sen}\, x}{-x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\mathrm{sen}\, x}{x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \text{com } -\frac{\pi}{2} < x < 0$$

$$\therefore \cos x < \frac{\mathrm{sen}\, x}{x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \text{com } \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$$

Pelo Teorema do Sanduíche $\boxed{\lim \dfrac{\mathrm{sen}\, x}{x} = 1}$

Pelo Teorema do Sanduíche $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$

Exercícios: 1) Calcular os seguintes limites

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{1}{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}$$

$$= \frac{x \operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \frac{x}{1+\cos x} = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \frac{x}{1+\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \frac{x}{1+\cos x} = 1^2 \cdot \frac{0}{2} = 0$$

c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ ERRO: $\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \overbrace{\operatorname{sen} x}^{\text{limitada}} = 0$$

Lista 1 ex. c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$, notemos que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ não existe

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\overbrace{\frac{x}{\operatorname{sen} x}}^{\to 1} \cdot \overbrace{x}^{\to 0}}_{\to 0} \cdot \overbrace{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}^{\text{limitada}} = 0$$

Lista 1 ex. 15. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x^2-4), & \text{se } x > 2 \\ x^2+x-6, & \text{se } x < 2 \\ 0, & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

Determine o conjunto dos pontos em que f é contínua. Justifique

$x > 2 \Rightarrow f(x) = \text{sen}(x^2-4)$ é contínua, pois f é composta de funções contínuas

$x < 2 \Rightarrow f(x) = x^2+x-6$ é contínua, pois f é uma função polinomial

Falta estudar o caso em que $x=2$

f é contínua em $x=2$ se $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe e é um número real

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$$

$f(2) = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 2^+ \\ x>2}} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \text{sen}(x^2-4) = \text{sen}(4-4) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 2^- \\ x<2}} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2+x-6) = 4+2-6 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 0 = f(2)$$

$\Rightarrow f$ é contínua em $x=2$

$\Rightarrow \mathbb{R}$ é o conjuntos de pontos onde f é contínua

16) Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -ax-1, & \text{se } x \geq 1 \\ -x^2+a^2(2-x)x, & \text{se } x<1 \\ 0, & \text{se } x=1 \end{cases}$$

Existe a que torne f contínua em 1? Justifique

f é contínua em 1 se $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe e

$$\boxed{\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)}$$

$\boxed{f(1) = 0}$ $\quad \lim_{\substack{x \to 1^+ \\ x>1}} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-ax-1) = -a \cdot 1 - 1 = -a-1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(-x^2+a^2(2-x)x) = -1+a^2.1.1 = -1+a^2$$

$x<1$

O $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe se os limites laterais forem iguais, então

$$-a-1 = -1+a^2 \Rightarrow a^2+a=0 \Rightarrow a(a+1)=0$$

$$\Rightarrow a=0 \text{ ou } a=-1$$

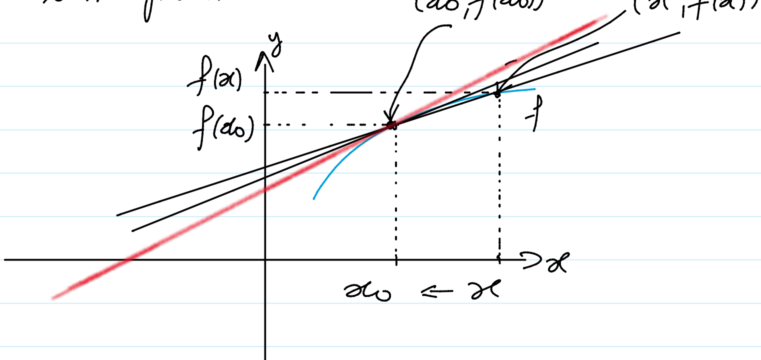
Para $a=0$, temos que $\lim_{x\to 1} f(x) = -1 \neq 0 = f(1)$

Para $a=-1$, temos que $\lim_{x\to 1} f(x) = 0 = f(1)$

$\therefore$ Para f ser contínua em 1, o valor de $a=-1$

DERIVADAS

Motivação é definir reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto



O coeficiente angular da reta secante que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$ é dado por

$$m(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Dizemos que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dado por

$$m = \lim_{x\to x_0} m(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{se existir}$$

DEF (Derivada): Sejam $f: D_f \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D_f$ ponto de acumulação de D_f. Dizemos que f é derivável em x_0, se o

DEF (Derivada): Sejam $f: D_f \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D_f$ ponto de acumulação de D_f. Dizemos que f é derivável em x_0, se o limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ existir e for um número finito

NOTAÇÃO: $$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Exemplos: 1) Seja $f(x) = k$ (função constante), mostre que $f'(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{k - k}{x - x_0} = 0$$

2) Seja $f(x) = x$, mostre que $f(x) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

chamando $h = x - x_0$, então $x = x_0 + h$

como $x \to x_0$, então $h \to 0$

Assim, $$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

função derivada: $f': D_{f'} \to \mathbb{R}$, é dada por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Notemos que $D_{f'} \subset D_f$