

Vibrações Forçadas em Sistemas de 2 graus de liberdade

Tomando o sistema já excitado anteriormente, sem amortecimento

Variação das forças

TMB

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1(t) = k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1 + F_0 \text{sen}(wt) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) = -k_2(x_2 - x_1) \end{cases}$$

ou

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \text{sen}(wt) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Equilíbrio ($x_1=0; x_2=0$)
Força não aplicada

Soluções do sistema de equações diferenciais

- solução do sistema homogêneo (sem a excitação no tempo)
- solução particular (solução de regime permanente)

Observar que conforme já mostrado em vibrações livres (sistema homogêneo) qualquer amortecimento leva a soluções transitórias (sistema homogêneo) para zero após certo tempo e somente a solução particular e que permanece permanentemente.

Vamos ~~usar~~ procurar a solução particular.

$$\begin{cases} x_{1p}(t) = X_1 \text{sen}(wt) \\ x_{2p}(t) = X_2 \text{sen}(wt) \end{cases}$$

uma vez que a excitação está em $\text{sen}(wt)$ e só aparecem as variáveis e suas derivadas seguintes

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \text{sen}(wt) = \begin{pmatrix} F_0 \text{sen}(wt) \\ 0 \end{pmatrix}$$

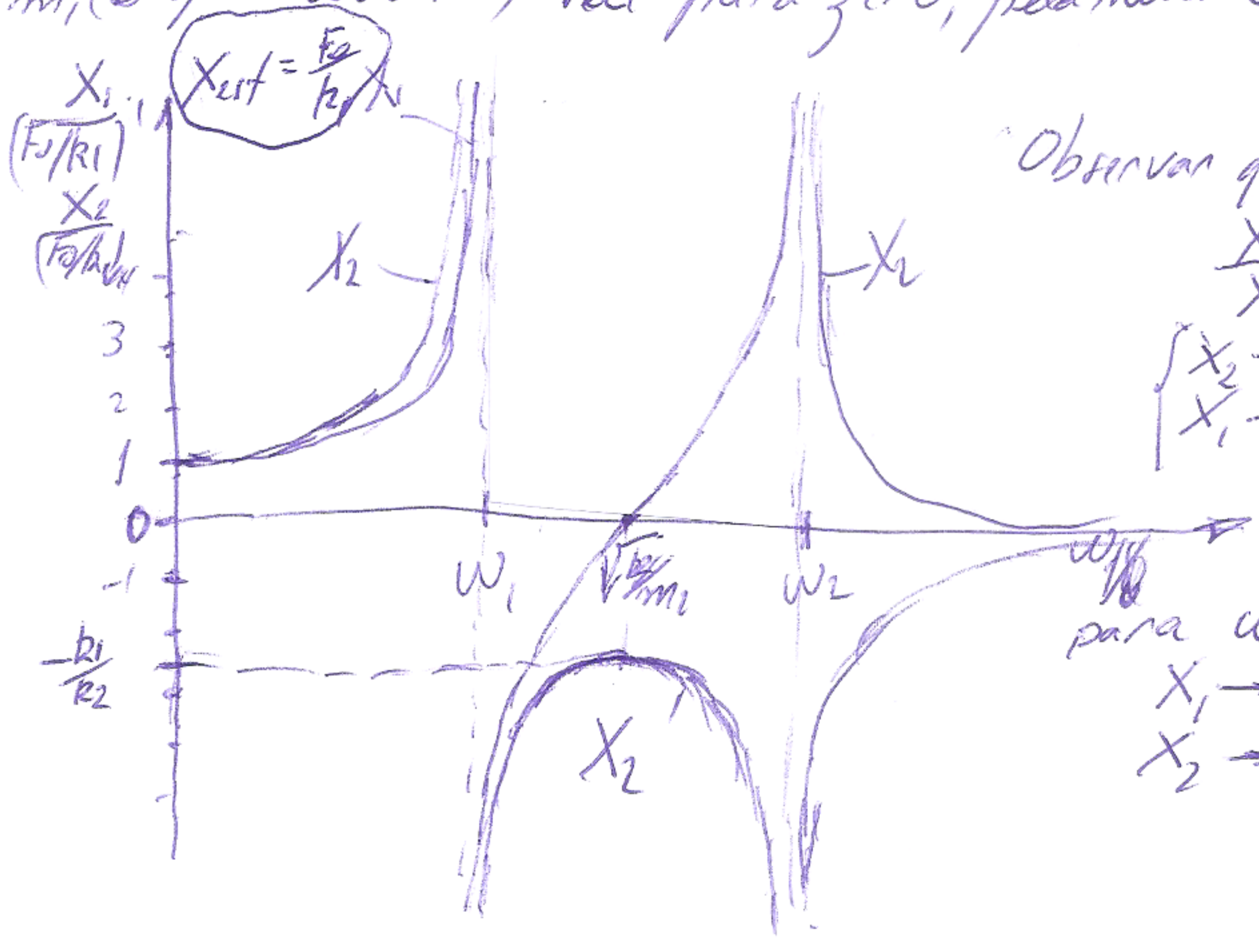
$$\therefore X_1 = \frac{F_0 (k_2 - m_2 \omega^2)}{\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix}} ; X_2 = \frac{F_0 k_2}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2}$$

Observar que as expressões nos denominadores são idênticas as da equação de frequências quando resolvemos o sistema livre, exatamente pelo fato de que lá os ω eram as incógnitas e impuntamos que a expressão total fosse nula. Portanto, quando ω_f for igual a ω_1 ou ω_2 (as frequências naturais) as amplitudes X_1 e X_2 vão para o infinito. O denominador poderia ser escrito simplesmente como $k_1 k_2 (1 - (\frac{\omega_f}{\omega_1})^2)(1 - (\frac{\omega_f}{\omega_2})^2)$ onde ω_1 e ω_2 são as frequências naturais do sistema.

$$X_1 = \frac{F_0 (k_2 - m_2 \omega_f^2)}{k_1 k_2 (1 - (\frac{\omega_f}{\omega_1})^2)(1 - (\frac{\omega_f}{\omega_2})^2)} \quad e \quad X_2 = \frac{F_0 k_2}{k_1 k_2 (1 - (\frac{\omega_f}{\omega_1})^2)(1 - (\frac{\omega_f}{\omega_2})^2)}$$

Observar que qdo $\omega_f = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$; $X_1 = 0$. Apesar da força de excitação estar sendo aplicada na massa m_1 , esta fica "parada" e a massa m_2 que oscila, de modo a aplicar uma força (via mola k_2) que anula a força líquida na massa m_1 . Nesta situação a massa m_2 com a mola k_2 funcionam como um "absorvedor dinâmico" da vibração do sistema com massa m_1 , mola k_1 e força de excitação $F_0 \sin(\omega_f t)$; $\omega_f = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$.

Imaginar o sistema m_2, k_2 como submetido a um ^{suporte} oscilante exatamente em sua frequência natural. Qualquer oscilação fútil do suporte levaria a amplitude X_2 para ∞ , e portanto a oscilação de m_1 (suporte oscilante) vai para zero, pela neutralização de forças líquidas.



Observar que para $\omega_f \rightarrow \omega_1$

$$\frac{X_2}{X_1} \Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{m_2 \omega_f^2}{k_2}}$$

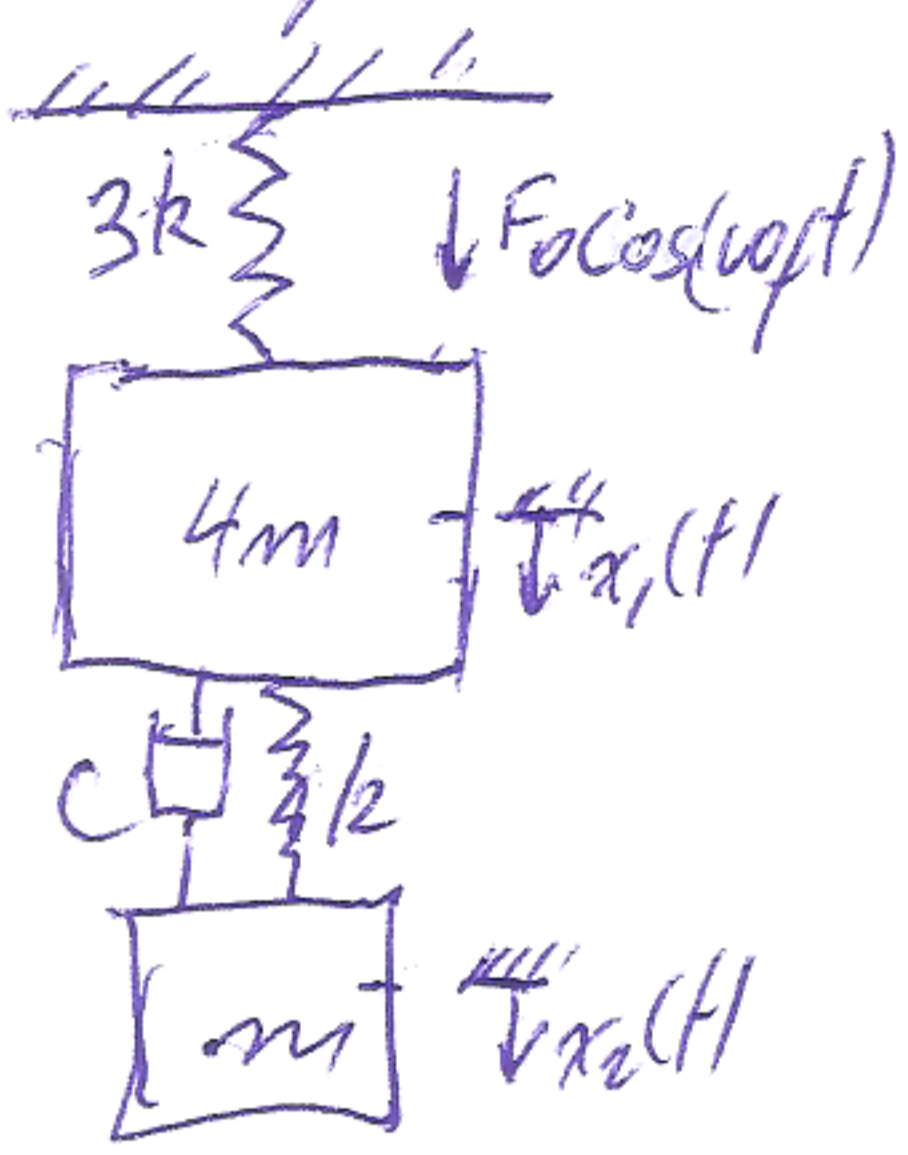
$$\begin{cases} X_2 \rightarrow \infty \\ X_1 \rightarrow \infty \end{cases}$$

para $\omega_f \rightarrow \omega_2$

$$\begin{cases} X_1 \rightarrow +\infty \\ X_2 \rightarrow -\infty \text{ mas} \end{cases}$$

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{1}{1 - \frac{m_2 \omega_f^2}{k_2}}$$

Vamos resolver o mesmo sistema com massas $m_1 = 4m$; $m_2 = m$
 $k_1 = 3k$; $k_2 = k$ e amortecimento $c_2 = c$ e $c_1 = 0$ para simplificar um pouco a álgebra



Neste caso as equ. dif. ficam:

$$\begin{cases} 4m \ddot{x}_1 = F_0 \cos(\omega t) + k(x_2 - x_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - 3kx_1 \\ m \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases}$$
$$m \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + k \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t)$$

Buscando a solução particular.

$F_0 \cos(\omega t) = \text{Re}(F_0 e^{i\omega t})$ observar que se excitamos em $\sin(\omega t)$ as respostas saem em $\sin(\omega t - \psi)$ e se excitamos em $\cos(\omega t)$ elas saem em $\cos(\omega t - \psi)$

Vamos buscar soluções do tipo $\begin{pmatrix} x_{1p}(t) \\ x_{2p}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$ tomando a parte real só no final

Derivando e substituindo vem:

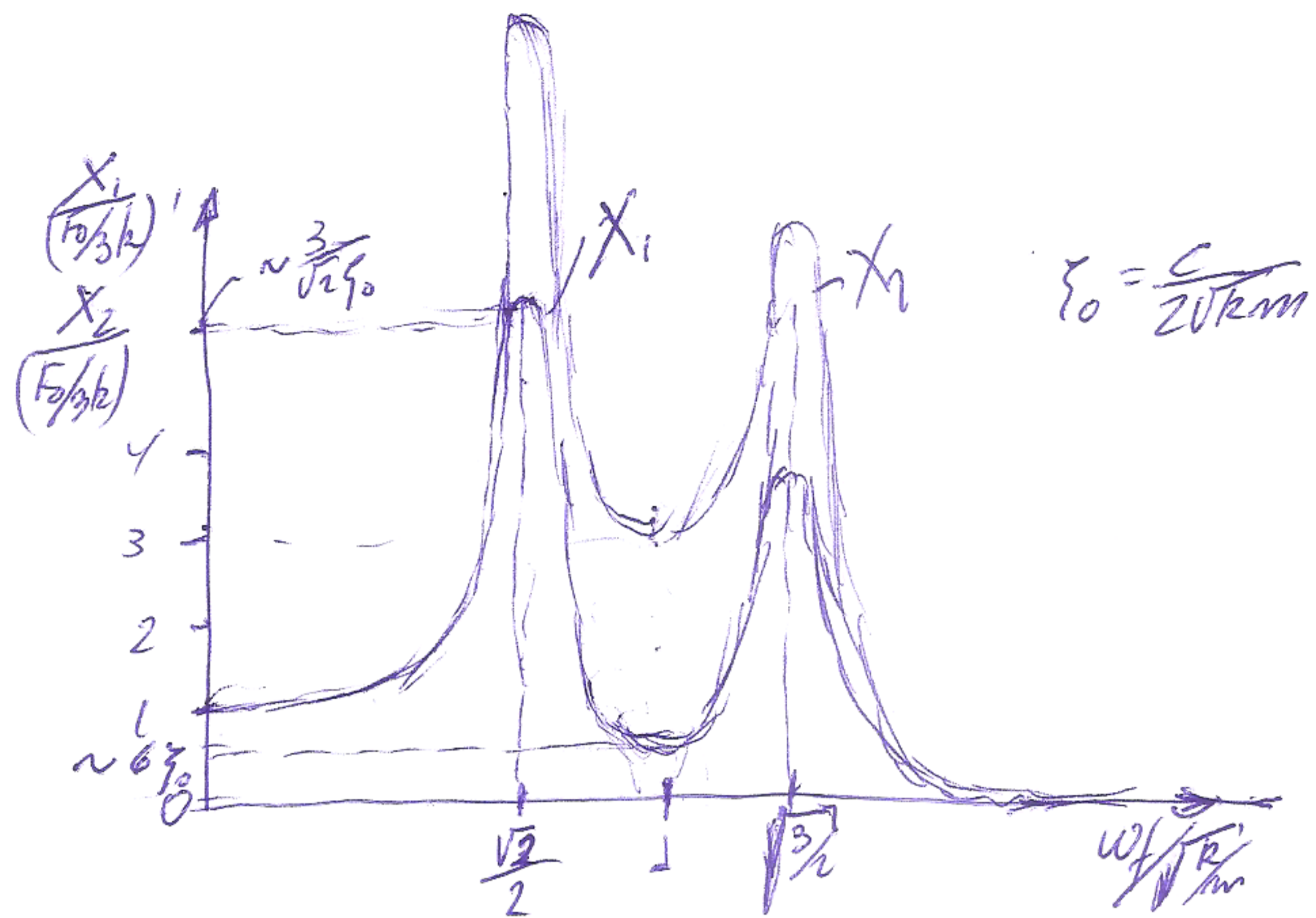
$$\begin{bmatrix} 4(k - m\omega^2 + \frac{c \cdot i\omega}{4}) & -(c \cdot i\omega + k) \\ -(c \cdot i\omega + k) & (k - m\omega^2 + c \cdot i\omega) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

Após muita álgebra chegamos em valores complexos para A_1 e A_2 em função de ω e dos demais parâmetros m, c e k .

Digamos $A_1 = p_1 + q_1 i$ e $A_2 = p_2 + q_2 i$ ou
 $A_1 = \sqrt{p_1^2 + q_1^2} \cdot e^{-i\psi_1}$ e $A_2 = \sqrt{p_2^2 + q_2^2} \cdot e^{-i\psi_2}$

Obteríamos portanto as respostas em regime permanente
 $x_{1p}(t) = \sqrt{p_1^2 + q_1^2} \cdot \cos(\omega t - \psi_1)$
 $x_{2p}(t) = \sqrt{p_2^2 + q_2^2} \cdot \cos(\omega t - \psi_2)$ para a ~~excitação~~ excitação $F_0 \cos(\omega t)$

O gráfico dos fatores de amplificação, de modo semelhante ao caso não amortecido (tomado com módulo de $\frac{x_{1p}}{x_{1st}}$ e $\frac{x_{2p}}{x_{2st}}$) mostra que as amplitudes crescem bastante nas ressonâncias, mas são limitadas e o valor x_1 não vai para 0 para $\omega^2 = \frac{k}{m}$.



Absorvedores dinâmicos de vibração

A característica observada em sistemas de dois graus de liberdade de que um sistema massa-mola aplicado em um ponto do sistema dinâmico principal, ~~em~~ ^{quando excitado em sua frequência natural} aplicar uma força suficientemente grande para provocar a ampliação de vibração naquele ponto do sistema principal, é muito utilizada em engenharia para resolver problemas de vibração indesejada. No sistema estudado, a massa ~~no amortecedor~~ ^{amortecedor} m_2 com a mola k_2 constituem um absorvedor dinâmico de vibração para o sistema formado por m_1, k_1 e a força de excitação $F_0 \cos(\omega_f t)$ quando a frequência $\omega_f = \sqrt{k_2/m_2}$. Apesar de estarmos aplicando a força de excitação na massa m_1 , esta fica "parada" e a massa m_2 se mantém vibrando na frequência de excitação coincidente com sua frequência natural, de modo a aplicar na massa m_1 uma força $F_0 \cos(\omega_f t)$ no sentido oposto à força de excitação externa.

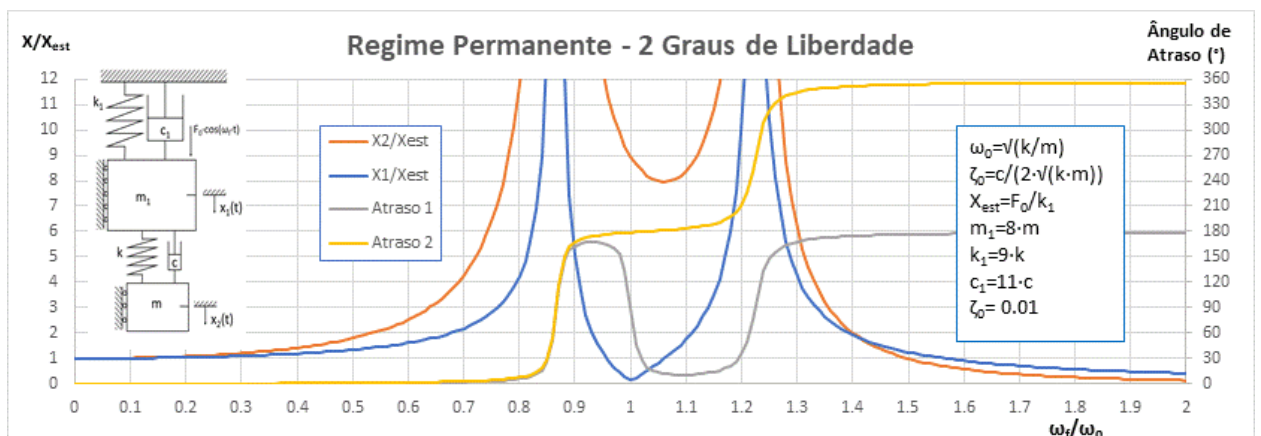
Já no caso do sistema com massas m e $4m$ e amortecedor c , o sistema m, k e c constituem um absorvedor dinâmico com amortecedor para o sistema $4m, 3k$ e $F_0 \cos(\omega_f t)$ quando ω_f é próxima da frequência natural do absorvedor $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Muitos edifícios e equipamentos apresentam vibrações como consequência de seu próprio princípio de funcionamento como pias, motores com pistões alternativos, máquinas rotativas, etc.

Digamos que determinado equipamento opera em uma rotação aproximadamente constante, e pelo seu próprio funcionamento vibra em uma frequência aproximadamente constante, associada a rotação. Se desejarmos ~~reduzir~~ ou reduzir significativamente a vibração em determinado ponto do sistema, bastaria fixarmos naquele ponto um sistema massa-mola com frequência natural igual à frequência de excitação, ^{na} ~~que~~ ponto estaria vibrando. Nesta situação, construiríamos um absorvedor de vibrações sintonizado pela frequência de excitação. Vale observar que se a massa do absorvedor fosse desprezível em relação à massa ^{vibrante} do sistema ~~vibrante~~ original, e se o absorvedor pudesse vibrar com grandes amplitudes e sem amortecimento, tudo estaria resolvido. Na realidade, ^{com massa não} ~~nao se pode~~ esquecer, que ao sistema original foi acrescentado mais um grau de liberdade. Se tínhamos uma frequência natural, passamos a ter duas, uma ligeiramente abaixo e outra ligeiramente acima da frequência natural original, fato que traz alguma complicação quanto à ótima frequência de sintonização. Outras situações existem, nas quais as rotações e frequências de excitação são muito variáveis, e o que se deseja é evitar que alguma ressonância em partes pouquíssimo amortecidas (peças metálicas integrais submetidas a esforços com amplo espectro de frequências) possam provocar excessos de deformações e tensões nas frequências naturais das peças. Nesta situação, projeta-se o absorvedor para minimizar as deformações em toda a faixa de frequências, considerando também o amortecimento necessário do absorvedor para desempenhar bem o seu papel. Digamos que projetamos um absorvedor ótimo para um espectro amplo de frequências.

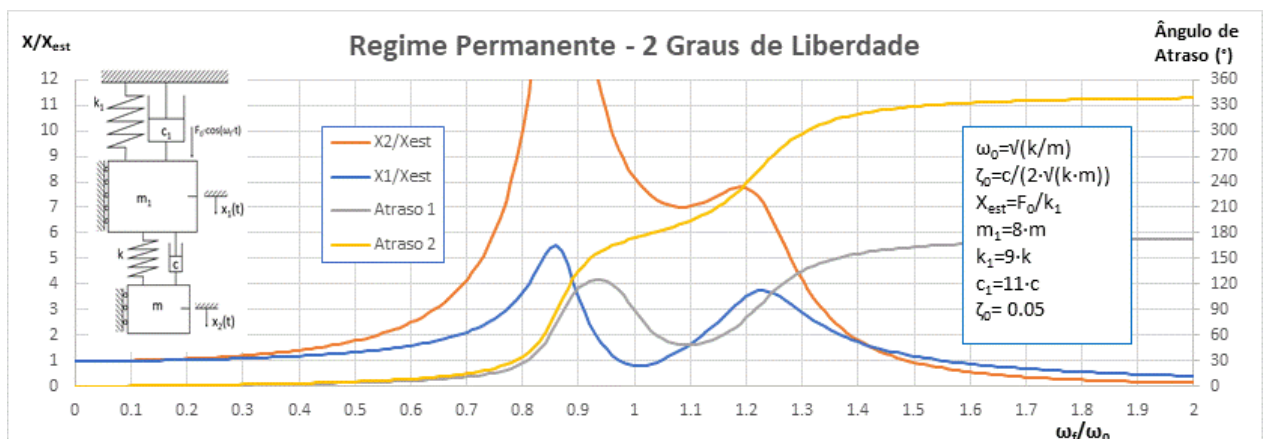
Na realidade da engenharia, o conhecimento mais detalhado do espectro de frequências e amplitudes da excitação possibilita fazer escolhas melhores das características do absorvedor.

Resultados de Simulação de Resposta em Regime Permanente para Sistemas com 2 Graus de Liberdade

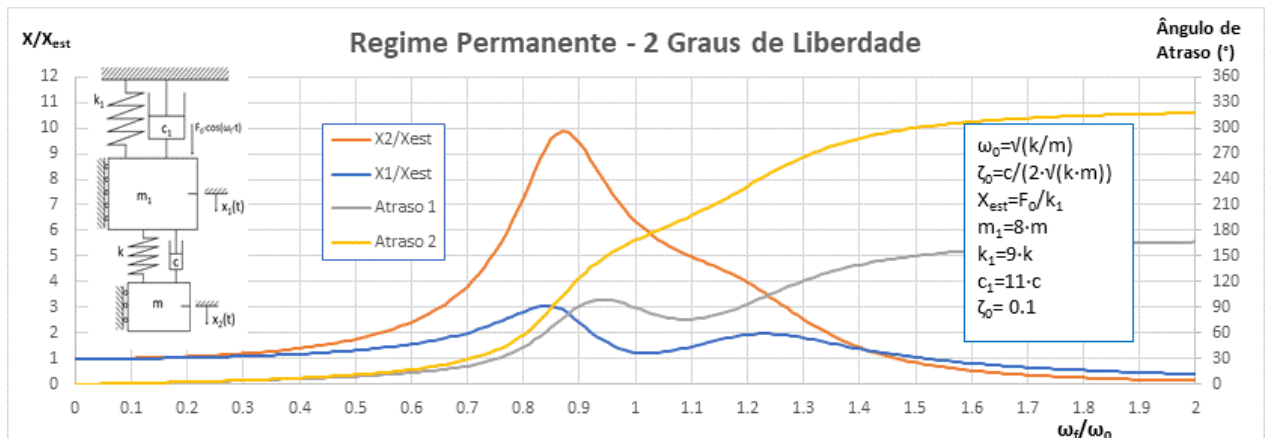
$\Re(F_0 \cdot e^{i \cdot \omega_f \cdot t}) = F_0 \cdot \cos(\omega_f \cdot t)$			
$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (c_1 + c) \cdot \dot{x}_1 - c \cdot \dot{x}_2 + (k_1 + k) \cdot x_1 - k \cdot x_2 = F_0 \cdot e^{i \cdot \omega_f \cdot t}$			
$m \cdot \ddot{x}_2 - c \cdot \dot{x}_1 + c \cdot \dot{x}_2 - k \cdot x_1 + k \cdot x_2 = 0$			
$k_1 + k - m_1 \cdot \omega_f^2 + (c_1 + c) \cdot \omega_f \cdot i$	$-(k + c \cdot \omega_f \cdot i)$	A1	$= F_0$
$-(k + c \cdot \omega_f \cdot i)$	$k - m \cdot \omega_f^2 + c \cdot \omega_f \cdot i$	A2	$= 0$
$(k_1/k + 1) - (m_1/m) \cdot r^2 + (c_1/c + 1) \cdot 2 \cdot \zeta_0 \cdot r \cdot i$	$-(1 + 2 \cdot \zeta_0 \cdot r \cdot i)$		
$-(1 + 2 \cdot \zeta_0 \cdot r \cdot i)$	$1 - r^2 + 2 \cdot \zeta_0 \cdot r \cdot i$		
$v(k/m) = \omega_0$			
$\zeta_0 = 0.01$			
$m_1/m = 8$			
$k_1/k + 1 = 10$			
$c_1/c + 1 = 12$			



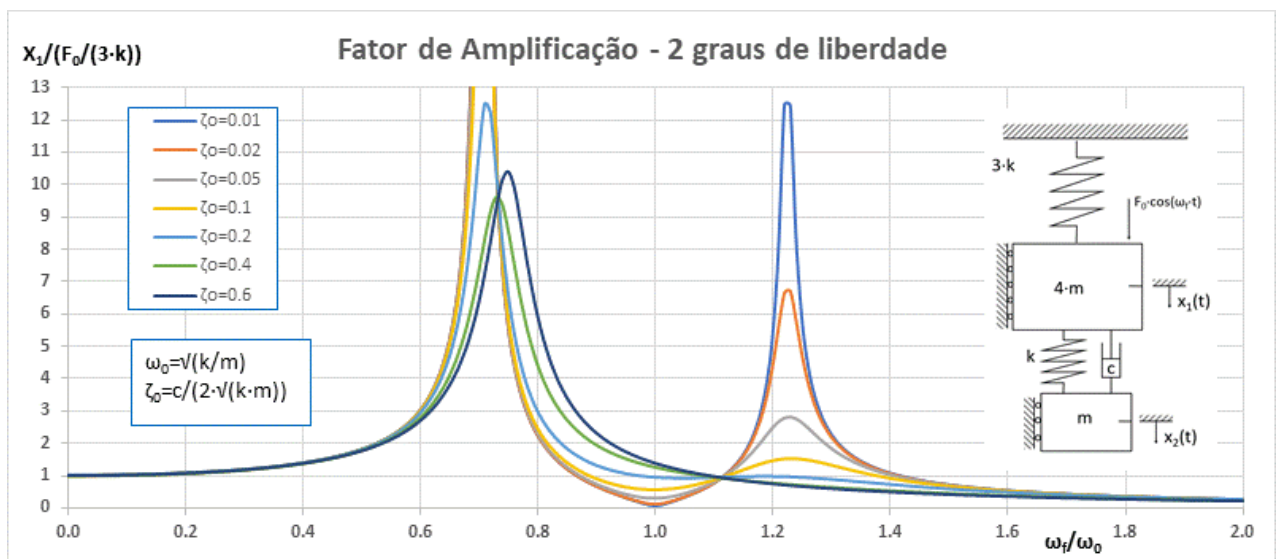
Observem as frequências naturais a $0.865 \cdot \omega_0$ e a $1.225 \cdot \omega_0$ e as mudanças bruscas das fases das respostas por ocasião das ressonâncias.

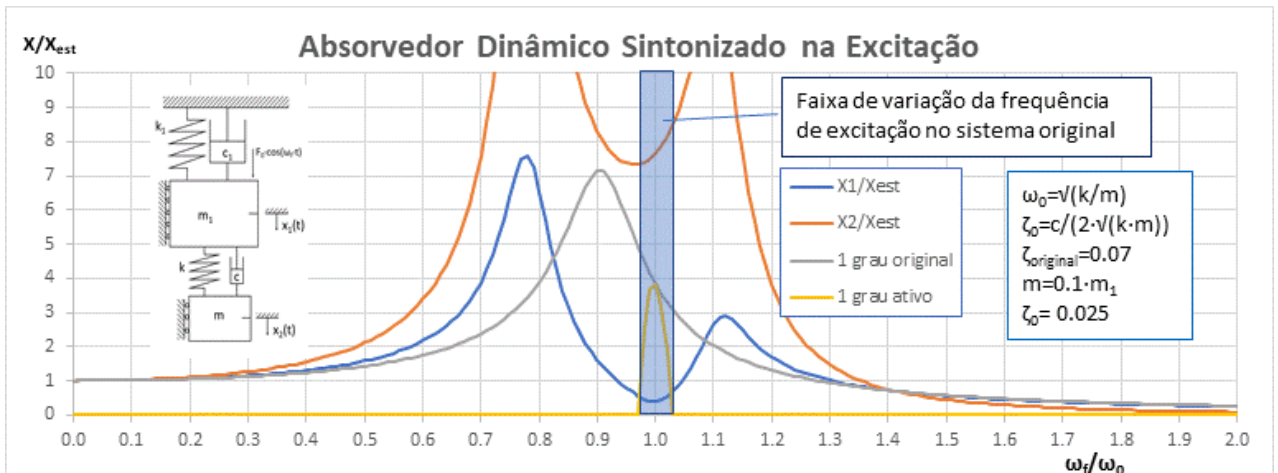


Observar as reduções muito significativas dos picos nas ressonâncias e as variações mais graduais das fases das respostas, à medida que o amortecimento aumenta.

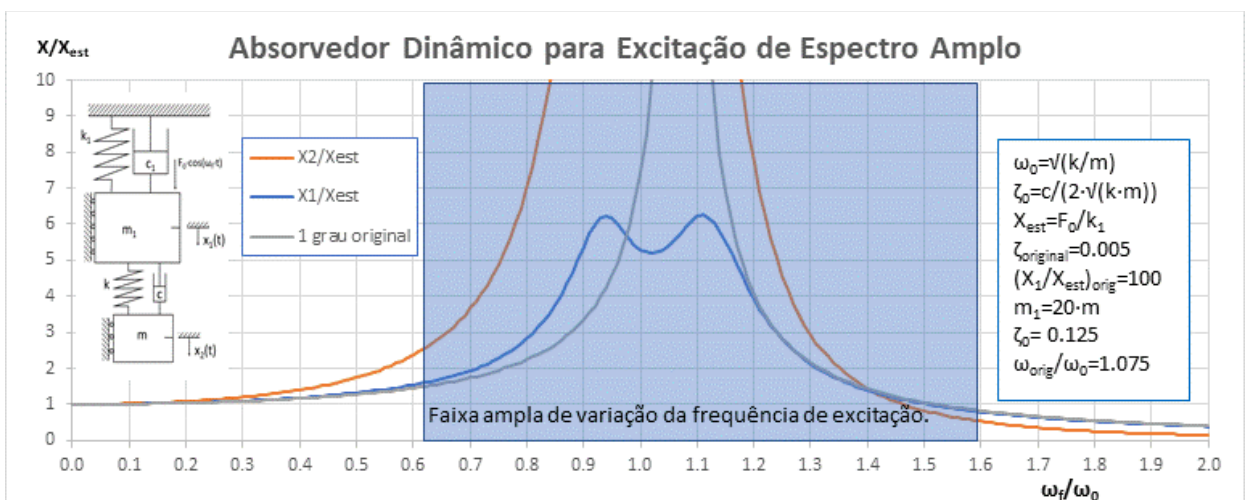


Para o sistema de massas $4 \cdot m$ e m da figura abaixo, o conjunto m , k e c funciona, até certo ponto, como um absorvedor de vibração da massa $4 \cdot m$. Ele é bastante efetivo para reduzir a amplitude de vibração da massa $4 \cdot m$ em torno da frequência ω_0 quando c é baixo, mas pouco efetivo em reduzir as amplitudes nas frequências naturais do sistema. Quando aumenta o valor de c os picos nas ressonâncias são reduzidos, mas a efetividade do absorvedor em torno da frequência ω_0 é prejudicada. Observar também que um aumento excessivo do valor de c torna o absorvedor inoperante pelo enrijecimento de conjunto k , c .





O absorvedor dinâmico da figura acima foi projetado para ser adicionado a um sistema vibratório que era excitado por uma força harmônica com frequência variável em uma faixa estreita, neste caso entre 7 e 13% acima da frequência natural do sistema original, o qual tinha um fator de amortecimento $\zeta_{\text{original}}=0.07$ (amplificação na ressonância de cerca de 7). Observar a amplitude de resposta real do sistema original, que só é excitado na faixa de frequência em que o sistema opera, e com valores de força reduzidos nas extremidades da faixa. Nesta condição, o absorvedor foi bastante efetivo, reduzindo a amplitude de vibração para valores menores que 50% da amplitude provocada pela força de excitação aplicada estaticamente.



O absorvedor dinâmico da figura acima foi projetado para adicionar amortecimento ao sistema original, que possuía uma frequência natural com baixíssimo amortecimento e uma excitação de frequência variável que cobria uma ampla faixa de frequências. A mesma deformação máxima observada para os dois picos de ressonância do sistema com o absorvedor foi conseguida ajustando-se os valores de k e c , de modo a ser a menor possível para $m=0.05 \cdot m_1$. O absorvedor definido, para a dada relação de massas, pode ser considerado ótimo por minimizar a máxima deformação observável para uma excitação de mesma intensidade em toda a faixa de frequências. Conhecida a variação da força de excitação em função da frequência e do possível critério de fadiga por tensão do componente original, valores ótimos diferentes de k e c poderiam ter sido obtidos.