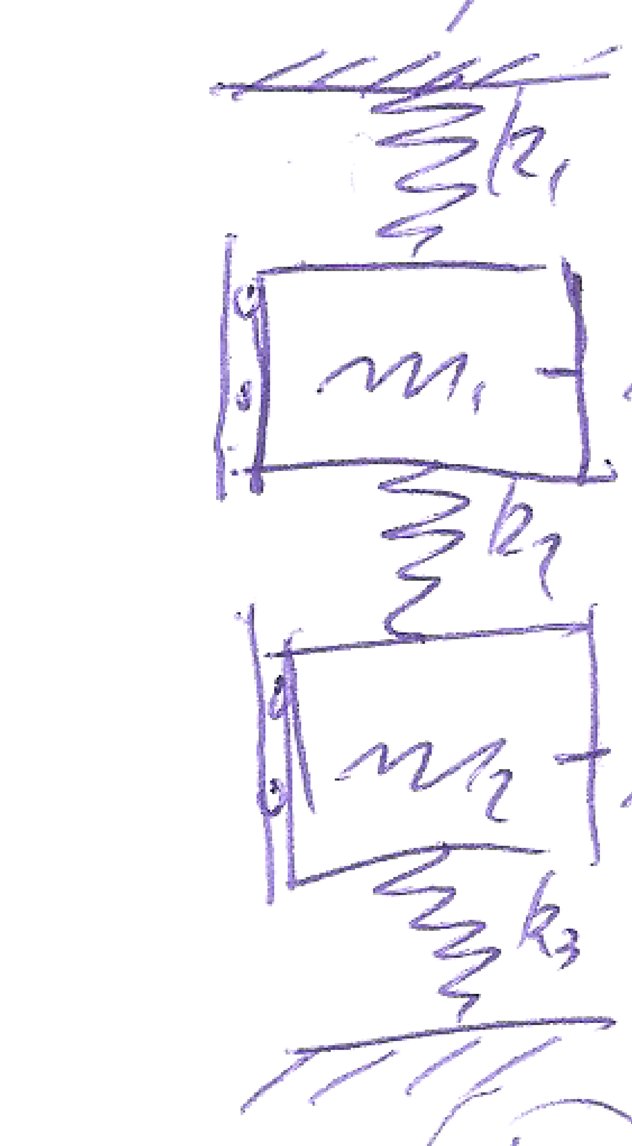
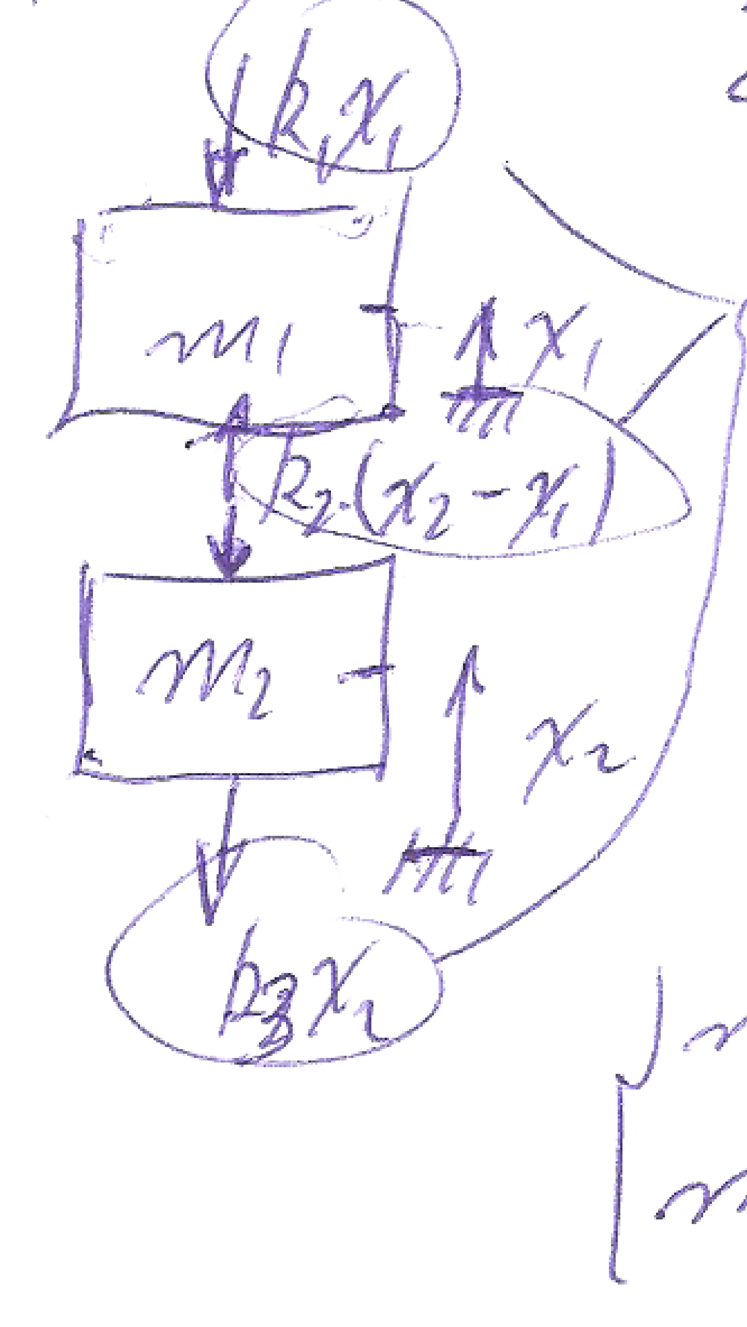
# Vibrações em Sistemas com 2 graus de liberdade $\boxed{\text{Livres não amortecidos}}$

Introdução - Sistemas c/ 1 grau de liberdade → 1 frequência natural → vibração harmônica → troca de energia entre reservatório de energia cinética e de energia potencial.
Dois graus de liberdade → 2 variáveis no tempo para cobrir as configurações possíveis do sistema. →
→ 2 maneiras (modos de) do sistema vibrar harmonica/ →
→ modos principais e cada frequência correspondente chamamos de frequência natural.
Muitas maneiras do sistema vibrar não harmonicamente
→ Esses movimentos periódicos complicados são compostos dos modos principais, como vamos mostrar.

## Modos principais.



No mínimo dois reservatórios de energia cinética independentes (variáveis ≠s) /
Escolha das variáveis que irão representar a evolução do sistema no tempo.
$x_1(t)$ e $x_2(t)$ ⇒ a zero na configuração de equilíbrio
Coloco as duas variáveis em posições genéricas e isolo os corpos para obter as equações diferenciais do movimento.



variações nas forças em relação à posição de equilíbrio; coerência entre os sentidos indicados das forças e as expressões matemáticas grafadas ao seus lados.
Neste caso TMB p/ massas $m_1$ e $m_2$ fornece:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1(t) = k_2(x_2-x_1) - k_1x_1 \\ m_2\ddot{x}_2(t) = -k_3x_2 - k_2(x_2-x_1) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} ① & m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1+k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) = 0 \\ ② & m_2 \ddot{x}_2(t) - k_2 x_1(t) + (k_2+k_3)x_2(t) = 0 \end{cases}$$

} sistema de Equ. Dif. a ser resolvido em conjunto

Equações são acopladas; não consigo resolver ① sem resolver a ② simultaneamente.

Vamos procurar soluções do tipo (observem mesmo argumento)
$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \\ x_2(t) = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \end{cases}$$

Será que existem soluções deste tipo?
Certamente $A_1 = A_2 = 0$ satisfaz (posição de equilíbrio)
Derivando 2 vezes $x_1(t)$ e $x_2(t)$ e substituindo obtemos:

$$\begin{cases} (k_1+k_2-m_1\omega^2)\cdot A_1 \operatorname{sen}(\omega t+\phi) - k_2 A_2 \operatorname{sen}(\omega t+\phi) = 0 \\ -k_2 A_1 \operatorname{sen}(\omega t+\phi) + (k_2+k_3-m_2\omega^2) A_2 \operatorname{sen}(\omega t+\phi) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{(k_1+k_2-m_1\omega^2)A_1 - k_2 A_2} \cdot \operatorname{sen}(\omega t+\phi) = 0 \\ \boxed{-k_2 A_1 + (k_2+k_3-m_2\omega^2)A_2} \cdot \operatorname{sen}(\omega t+\phi) = 0 \end{cases}$$

(permanente $\neq 0$) Como o $\operatorname{sen}(\omega t+\phi)$ não é permanentemente $= 0$

Problema de autovalores e autovetores

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_1+k_2-m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3-m_2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Equações das amplitudes}}$$

Solução trivial $A_1 = A_2 = 0$ (posição original de equilíbrio)

outra possibilidade

$$\operatorname{Det}\begin{bmatrix} k_1+k_2-m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3-m_2\omega^2 \end{bmatrix} = 0 \therefore$$

$$(k_1+k_2-m_1\omega^2)\cdot(k_2+k_3-m_2\omega^2) - k_2^2 = 0$$ ⟸ Equação característica do sistema.

$$\underbrace{m_1 m_2}_{>0}\omega^4 - \underbrace{[(k_2+k_3)m_1 + (k_1+k_2)m_2]}_{>0}\omega^2 + \underbrace{(k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3)}_{>0} = 0.$$

Solução da biquadrada em $\omega$ fornece dois valores de $\omega_{1,2}^2$ (frequências naturais (autovalores)).
Cada valor de $\omega_{1\text{ ou }2}^2$ substituído nas equações das amplitudes fornecem relação entre os $A_1$ e $A_2$ (autovalores).

Para facilitar a álgebra digamos que $m_1 = m_2 = m$ e $k_1 = k_2 = k_3 = k$

Neste caso as equações das amplitudes ficam:

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 = (2k - m\omega^2)^2 - k^2 = 0$$

$$(2k - m\omega^2) = \pm k \therefore$$

$\therefore \begin{cases} m\omega_1^2 = k & \omega_1^2 = k/m \\ m\omega_2^2 = 3k & \omega_2^2 = 3k/m \end{cases}$ usualmente enumeram-se as frequências naturais em ordem crescente.

Para $\omega^2 = \omega_1^2 = k/m$, voltando nas equações das amplitudes

$$\begin{bmatrix} 2k - k & -k \\ -k & 2k - k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore \boxed{A_{11} = A_{21}}$$

(2º índice corresponde ao modo)

linearmente dependentes

1º modo de vibrar correspondente à primeira frequência natural $\omega_1 = \sqrt{k/m}$

Para $\omega^2 = \omega_2^2 = 3k/m$

$$\begin{bmatrix} 2k - 3k & -k \\ -k & 2k - 3k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore \boxed{A_{12} = -A_{22}}$$

2º modo de vibrar correspondendo a $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$

Achamos, portanto, 2 soluções possíveis:

$$\begin{cases} x_{11}(t) = A_{11} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi_1) \\ x_{21}(t) = A_{21} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi_1) \end{cases} \text{ com } A_{21} = A_{11} \text{ e } \omega_1 = \sqrt{k/m}$$

e

$$\begin{cases} x_{12}(t) = A_{12} \operatorname{sen}(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_{22}(t) = A_{22} \operatorname{sen}(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases} \text{ com } A_{22} = -A_{12} \text{ e } \omega_2 = \sqrt{3k/m}$$

ou

$$\begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} A_{11} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \phi_1\right) \text{ e } \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot A_{12} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\, t + \phi_2\right)$$

Sistema linear → soma de soluções é solução:

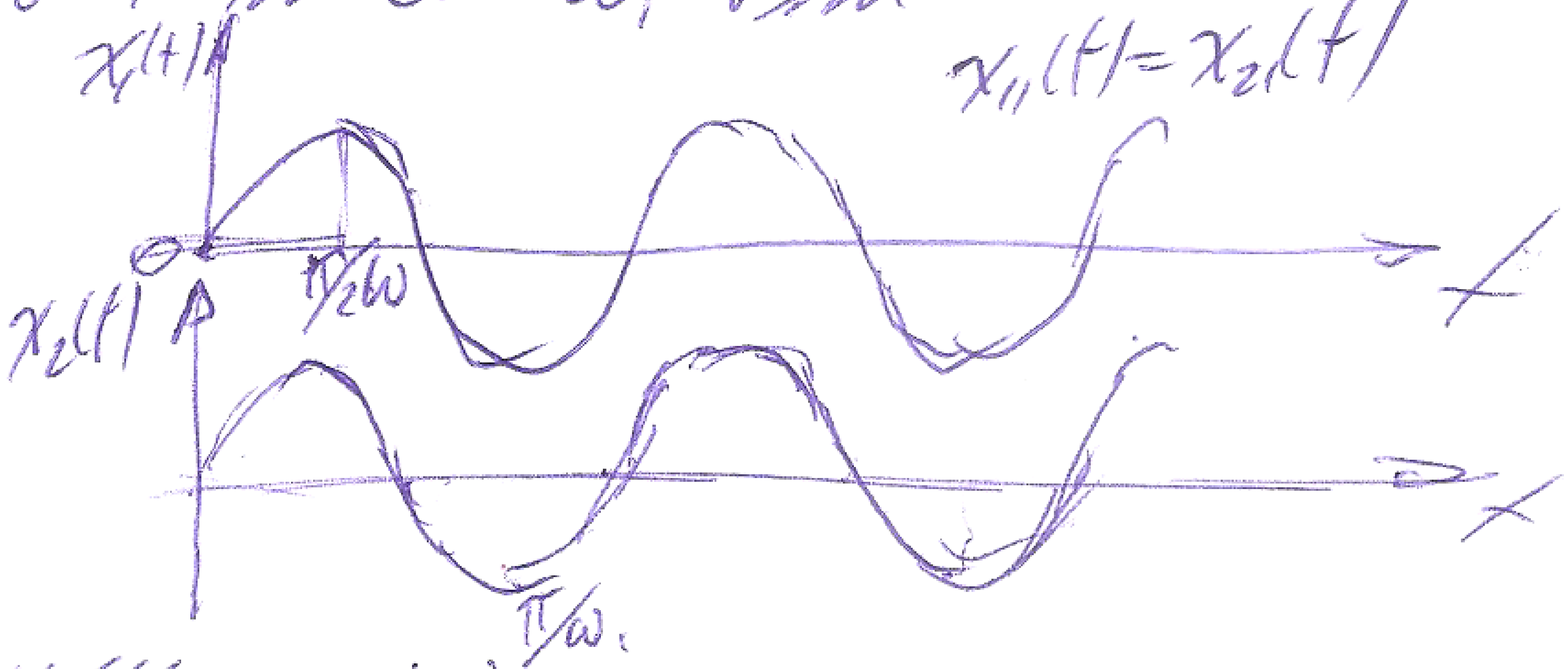
$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_{11}(t)\\x_{21}(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_{12}(t)\\x_{22}(t)\end{pmatrix}$$

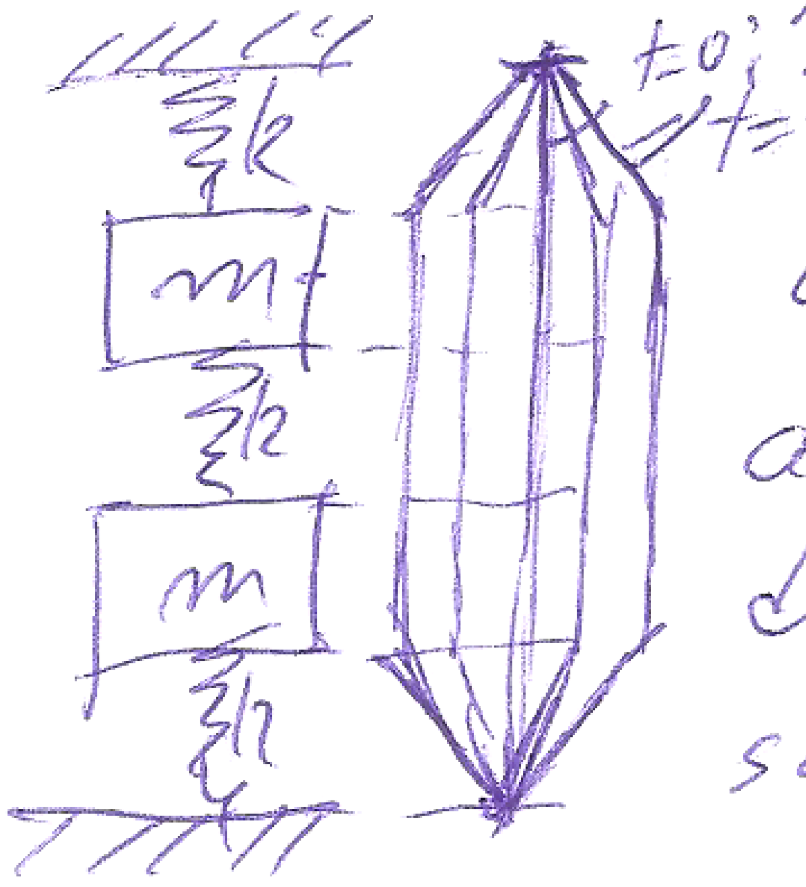
$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} A_{11}\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\phi_1\right) + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} A_{12}\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t+\phi_2\right)$$

4 constantes a ~~determinar~~ a partir das condições iniciais → Será que a solução é geral?

Antes disso vamos apreciar os modos de vibrar do sistema.

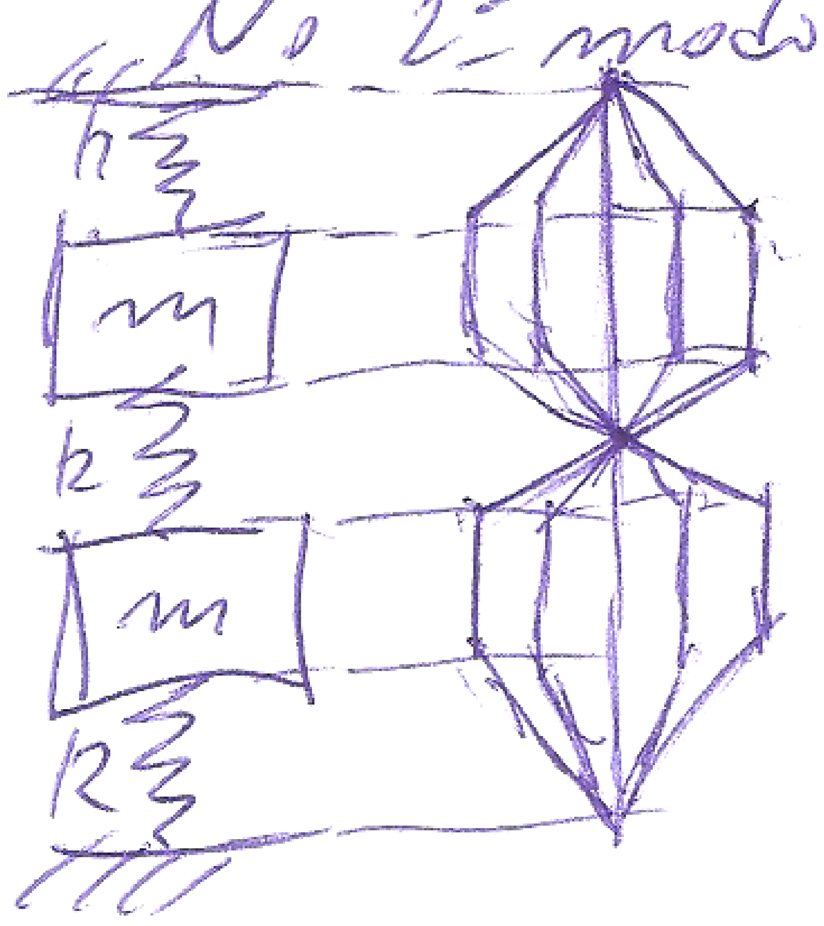
No 1º modo $\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}$




corda vibrante equivalente ao 1º modo
a mola do meio não trabalha. As duas massas m se deslocam em conjunto sobre duas molas k ∴ $\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}$

No 2º modo $x_{22}(t) = -x_{12}(t) = -A_{12}\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t+\phi_2\right)$




Corda equivalente ao 2º modo
O ponto central da mola do meio fica parado. Cada meia mola passa a ter rigidez 2k, como visto por cada massa m. Portanto $\omega_2=\sqrt{\frac{2k+k}{m}}$

Será que a soma desses dois modos com as respectivas frequências é solução geral do sistema de Equações?

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} A_{11} \operatorname{sen}\Big(\underbrace{\sqrt{\tfrac{k}{m}}}_{\omega_1} t + \phi_1\Big) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} A_{12} \operatorname{sen}\Big(\underbrace{\sqrt{\tfrac{3k}{m}}}_{\omega_2} t + \phi_2\Big) \quad \text{ou:}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot [A \operatorname{sen}(\omega_1 t) + B \cos(\omega_1 t)] + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot [C \operatorname{sen}(\omega_2 t) + D \cos(\omega_2 t)]$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} [A\omega_1 \cos(\omega_1 t) - B\omega_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t)] + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot [C\omega_2 \cos(\omega_2 t) - D\omega_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t)]$$

Condições iniciais possíveis

$$\left.\begin{aligned} x_1(0) &= x_{10} \\ x_2(0) &= x_{20} \\ \dot{x}_1(0) &= \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_2(0) &= \dot{x}_{20} \end{aligned}\right\} \text{reais quaisquer} \qquad \left|\begin{aligned} x_1(0) &= B + D = x_{10} \\ x_2(0) &= x_{20} = B - D \\ \dot{x}_1(0) &= \dot{x}_{10} = A\omega_1 + C\omega_2 \\ \dot{x}_2(0) &= \dot{x}_{20} = A\omega_1 - C\omega_2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{4 equações e} \\ &\text{4 incógnitas } (A,B,C,D) \end{aligned}$$

No nosso caso: $\boxed{B = \dfrac{x_{10} + x_{20}}{2}}$ $\boxed{D = \dfrac{x_{10} - x_{20}}{2}}$

$\boxed{A = \dfrac{\dot{x}_{10} + \dot{x}_{20}}{2\omega_1}}$ $\boxed{C = \dfrac{\dot{x}_{10} - \dot{x}_{20}}{2\omega_2}}$

para quaisquer valores reais de $x_{10}, x_{20}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}$ podemos achar a solução: a $\boxed{\text{solução geral}}$

Conforme as condições iniciais, podemos fazer o sistema vibrar no 1º modo, no 2º modo, ou em uma combinação dos dois. Por exemplo:

Se $x_{10} = x_{20}$ e $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0 \longrightarrow B = x_{10}$ e $D = 0$, $C = 0$ e $A = 0$ (só vibra no 1º modo)

Se $x_{10} = -x_{20}$ e $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$ $\left\{\begin{aligned} &D = x_{10} \text{ e } B = 0 \\ &C = 0 \text{ e } A = 0 \end{aligned}\right\}$ só vibra no 2º modo.

Se $x_{10} \neq 0$ e $x_{20} = 0$; $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$ $\left(\begin{aligned} &B = \tfrac{x_{10}}{2};\ D = \tfrac{x_{10}}{2} \\ &C = 0,\ A = 0 \end{aligned}\right)$ $\therefore x_1(t) = \dfrac{x_{10}}{2}\cos(\omega_1 t) + \dfrac{x_{10}}{2}\cos(\omega_2 t)$ e

$x_2(t) = \dfrac{x_{10}}{2}\cos(\omega_1 t) - \dfrac{x_{10}}{2}\cos(\omega_2 t)$ { Dois modos e duas frequências.