Resumindo: 2 reservatórios de energia cinética independentes

→ 2 variáveis função do tempo que representam a configuração mais geral possível do sistema, preferencial/ =s a 0 na posição de equilíbrio do sistema.

→ colocando as variáveis em valores genéricos, com as correspondentes velocidades e acelerações (positivas no mesmo sentido positivo da variável), obter as equações diferenciais do movimento (TMB, TMA, energia, ...), que devem valer para quaisquer valores das variáveis e suas derivadas, para facilitar a integração.

→ para pequenas amplitudes de oscilação em torno da posição de equilíbrio, ~~o sistema~~ as equações diferenciais ficam lineares nas variáveis, quando não estão sendo consideradas forças dissipativas como atrito seco.

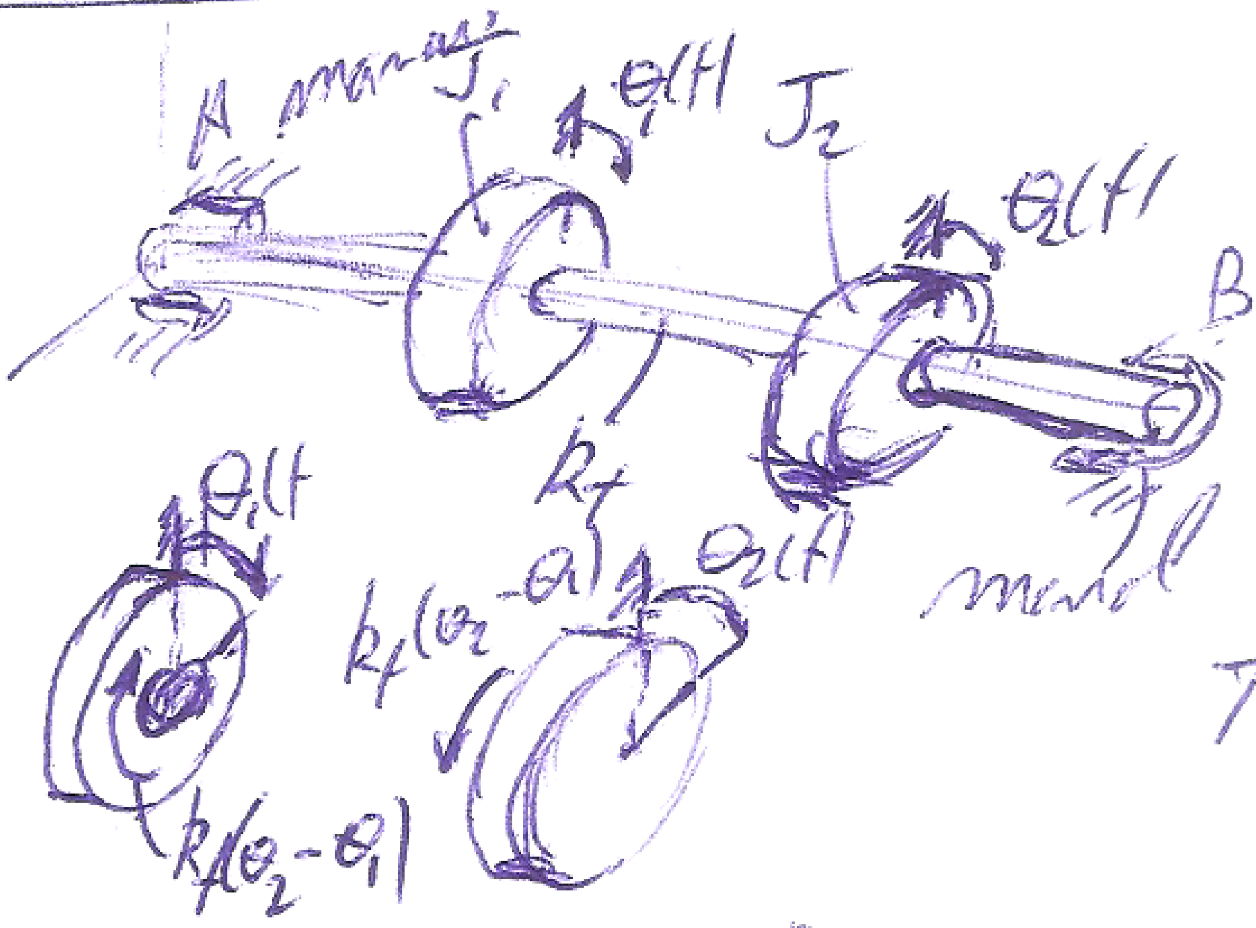
→ as equações diferenciais são geral/ acopladas e só conseguimos resolver o sistema. Não é possível resolver uma equação independentemente da outra.

→ buscamos soluções harmônicas para as variáveis; o mesmo $\sin(\omega t+\phi)$ para todas as variáveis.

→ obtemos um problema de autovalores e autovetores que nos dão duas frequências naturais com seus respectivos modos de vibrar.

→ solução geral do sistema de equações diferenciais é a soma dessas 2 soluções harmônicas simples.

Sistema torsional



2 reservatórios de energia cinética, $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ para representar a configuração mais geral; iguais a zero com o sistema parado em equilíbrio.

$$\text{TMA} \Rightarrow \begin{cases} J_1\ddot{\theta}_1(t) = k_t\cdot(\theta_2-\theta_1) \\ J_2\ddot{\theta}_2(t) = -k_t(\theta_2-\theta_1) \end{cases}$$

sistema de equações diferenciais acopladas

$$\begin{cases} J_1\ddot{\theta}_1(t) + k_t\theta_1(t) - k_t\theta_2(t) = 0 \\ J_2\ddot{\theta}_2(t) - k_t\theta_1(t) + k_t\theta_2(t) = 0 \end{cases}$$

Soluções harmônicas $\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \operatorname{sen}(\omega t+\phi) \\ \theta_2(t) = A_2 \operatorname{sen}(\omega t+\phi) \end{cases}$ ou

$$\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot \operatorname{sen}(\omega t+\phi)$$

Derivando e substituindo no sistema de equações diferenciais

$$(k_t - J_1\omega^2) \cdot A_1 \operatorname{sen}(\omega t+\phi) - k_t A_2 \operatorname{sen}(\omega t+\phi) = 0$$

$$-k_t A_1 \operatorname{sen}(\omega t+\phi) + (k_t - J_2\omega^2) A_2 \operatorname{sen}(\omega t+\phi) = 0 \quad \text{ou}$$

$$\begin{bmatrix} k_t - J_1\omega^2 & -k_t \\ -k_t & k_t - J_2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

problema de autovalores e autovetores.

Para obtermos solução ≠ da trivial, $A_1 = A_2 = 0$ o determinante da matriz dos coeficientes $= 0$

$$\det \begin{vmatrix} k_t - J_1\omega^2 & -k_t \\ -k_t & k_t - J_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \therefore (k_t - J_1\omega^2)(k_t - J_2\omega^2) - k_t^2 = 0$$

$$J_1 J_2 \omega^4 - k_t(J_1+J_2)\omega^2 + \cancel{k_t^2} - \cancel{k_t^2} = 0$$

Frequências naturais $\boxed{\omega_1^2 = 0}$; $\boxed{\omega_2^2 = \dfrac{k_t(J_1+J_2)}{J_1 J_2}}$

O que significa ~~esse~~ fisicamente frequência natural zero?

O sistema é semidefinido: não possui uma única posição de equilíbrio; a rigor possui uma infinidade de posições de equilíbrio: basta $\theta_1(0) = \theta_2(0)$ e $\dot\theta_1(0) = \dot\theta_2(0) = 0$ $\boxed{\text{1 reservatório de energia potencial}}$

Como ficam os autovetores?

para $\omega_0^2 = \omega_1^2 = 0$
$$\begin{bmatrix} k_t - J_1 \cdot 0 & -k_t \\ -k_t & k_t - J_2 \cdot 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*segundo índice para se referir à frequência natural.

$\therefore \boxed{A_{11} = A_{21}}$

$$\begin{pmatrix} \theta_{11}(t) \\ \theta_{21}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} A_{11} \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi_1)$$; vamos fazer ω_1 tender a zero, uma vez que A_{11} é uma constante a ser determinada pelas condições iniciais. Para qualquer t que desejarmos, sempre podemos escolher um valor de ω_1 suficientemente próximo de zero para

$\mathrm{sen}(\omega_1 t) \simeq \omega_1 t$ e $\cos(\omega_1 t) = 1$

$$\begin{pmatrix}\theta_{11}(t)\\ \theta_{21}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cdot A_{11}\,\mathrm{sen}(\omega_1 t + \phi_1) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\left[A_{11}\cos\phi_1\,\mathrm{sen}(\omega_1 t) + A_{11}\,\mathrm{sen}\,\phi_1 \cos(\omega_1 t)\right]$$

$$\begin{pmatrix}\theta_{11}(t)\\ \theta_{21}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Big[\underbrace{A_{11}\cos\phi_1 \cdot \omega_1}_{\text{constante, } \Omega} t + \underbrace{A_{11}\,\mathrm{sen}\,\phi_1}_{\substack{\text{constante}\\ \alpha_0}}\Big] = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(\Omega t + \alpha_0)$$

$$\begin{pmatrix}\dot\theta_{11}(t)\\ \dot\theta_{21}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cdot \Omega$$

movimento angular uniforme

$\dot\theta_{11}(t) = \dot\theta_{21}(t) = \Omega = ct.$

Para $\omega^2 = \omega_2^2 = \dfrac{k_t \cdot (J_1 + J_2)}{J_1 J_2}$ as equações de amplitude fornecem:

$$\begin{bmatrix} k_t - J_1 \cdot \dfrac{k_t (J_1 + J_2)}{J_1 J_2} & -k_t \\ -k_t & k_t - J_2 \cdot \dfrac{k_t (J_1 + J_2)}{J_1 J_2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}A_{12}\\A_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{k_t J_1}{J_2} & -k_t \\ -k_t & -\dfrac{k_t J_2}{J}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}A_{12}\\A_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \therefore A_{12} J_1 = -A_{22} J_2$$

$$\boxed{A_{22} = -\frac{J_1}{J_2} \cdot A_{12}}$$

oposição de fase, inversa/ proporcional à inércia

$$\begin{pmatrix}\theta_{12}(t)\\ \theta_{22}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -J_1/J_2\end{pmatrix} \cdot \underbrace{A_{12} \cdot \mathrm{sen}(\omega_2 t + \phi_2)}_{A\,\mathrm{sen}(\omega_2 t) + B\cos(\omega_2 t)} \quad \text{com } \omega_2 = \sqrt{\frac{k_t (J_1 + J_2)}{J_1 J_2}}$$

Solução geral

$$\begin{pmatrix}\theta_1(t)\\ \theta_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(\Omega t + \alpha_0) + \begin{pmatrix}1\\ -J_1/J_2\end{pmatrix} \cdot \left[A\,\mathrm{sen}(\omega_2 t) + B\cos(\omega_2 t)\right]$$

4 constantes a determinar

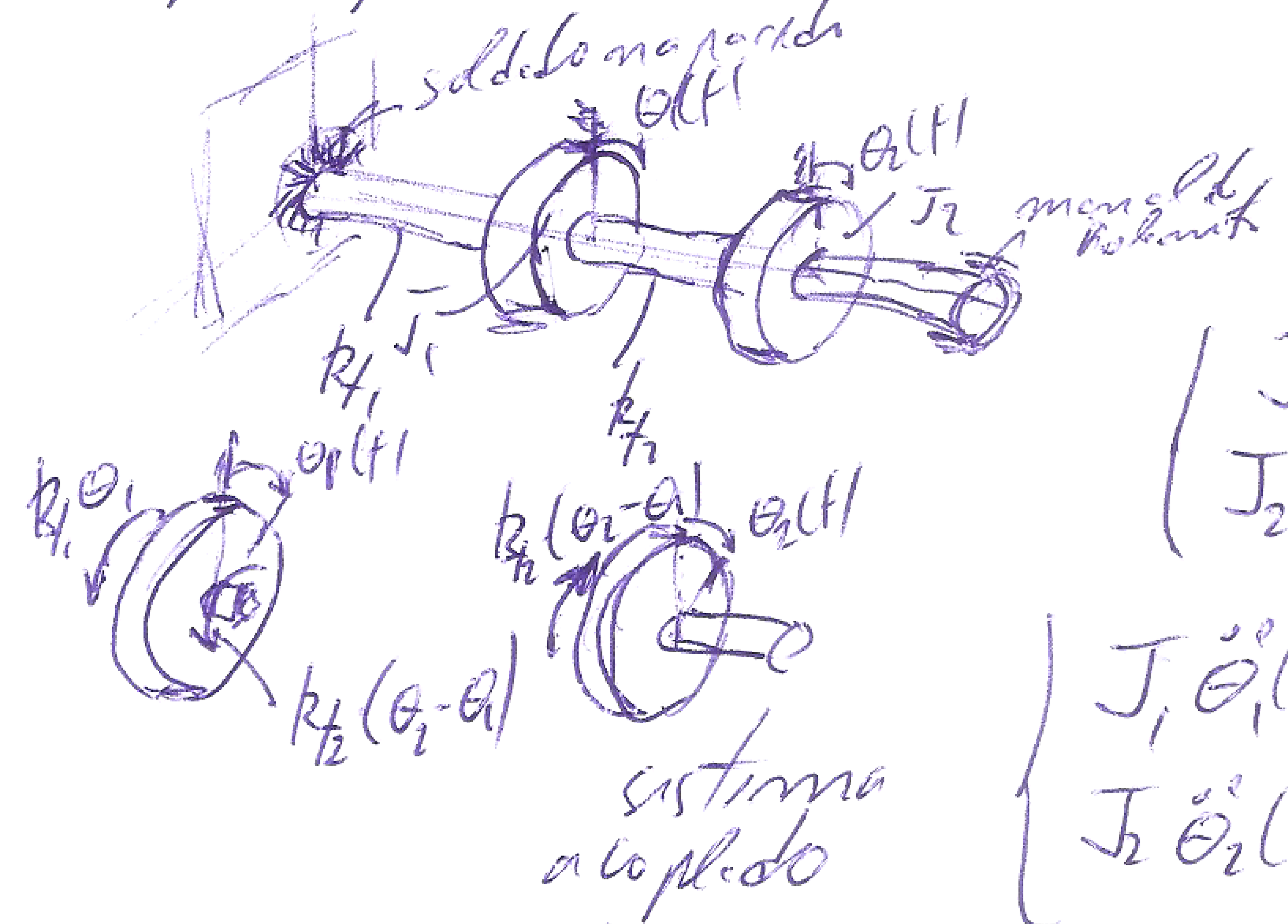
4 condições iniciais possíveis

$$\begin{cases}\theta_1(0) = \theta_{10}\\ \theta_2(0) = \theta_{20}\\ \dot\theta_1(0) = \dot\theta_{10}\\ \dot\theta_2(0) = \dot\theta_{20}\end{cases}$$

conforme esses valores podemos fazer o sistema vibrar ou simplesmente girar com velocidade angular ~~[illegible]~~ constante.

solução geral

Se o eixo do sistema tivesse uma das extremidades não livres para girar nos mancais A e B.



deixou de ser semidefinido
1 posição de equilíbrio bem definida

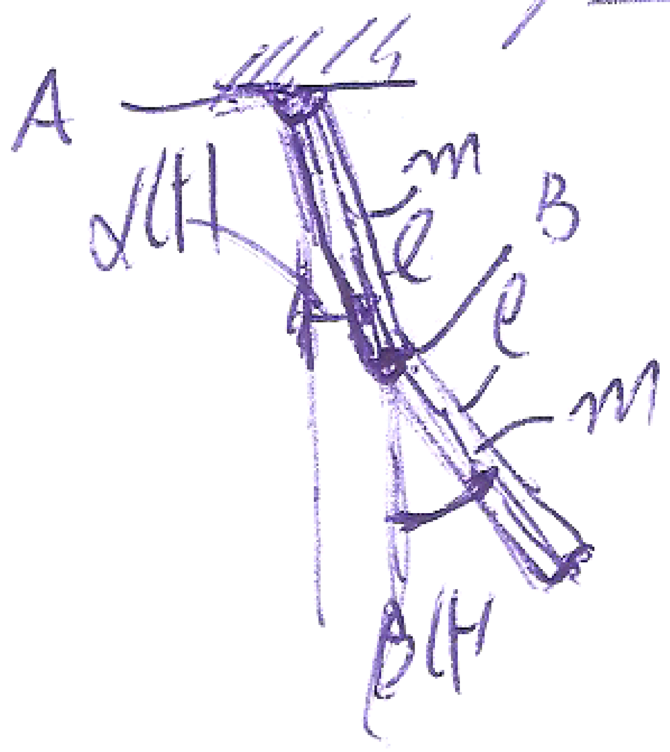
$$\begin{cases} J_1 \cdot \ddot{\theta}_1(t) = -k_{t_1} \theta_1(t) + k_{t_2}(\theta_2 - \theta_1) \\ J_2 \cdot \ddot{\theta}_2(t) = -k_{t_2}(\theta_2 - \theta_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1(t) + (k_{t_1} + k_{t_2})\theta_1(t) - k_{t_2}\theta_2(t) = 0 \\ J_2 \ddot{\theta}_2(t) - k_{t_2}\theta_1(t) + k_{t_2}\theta_2(t) = 0 \end{cases}$$

$\omega_1^2 \neq 0 \; ; \; \omega_2^2 \neq 0$

$\Downarrow$ 1º modo; $\Downarrow$ 2º modo

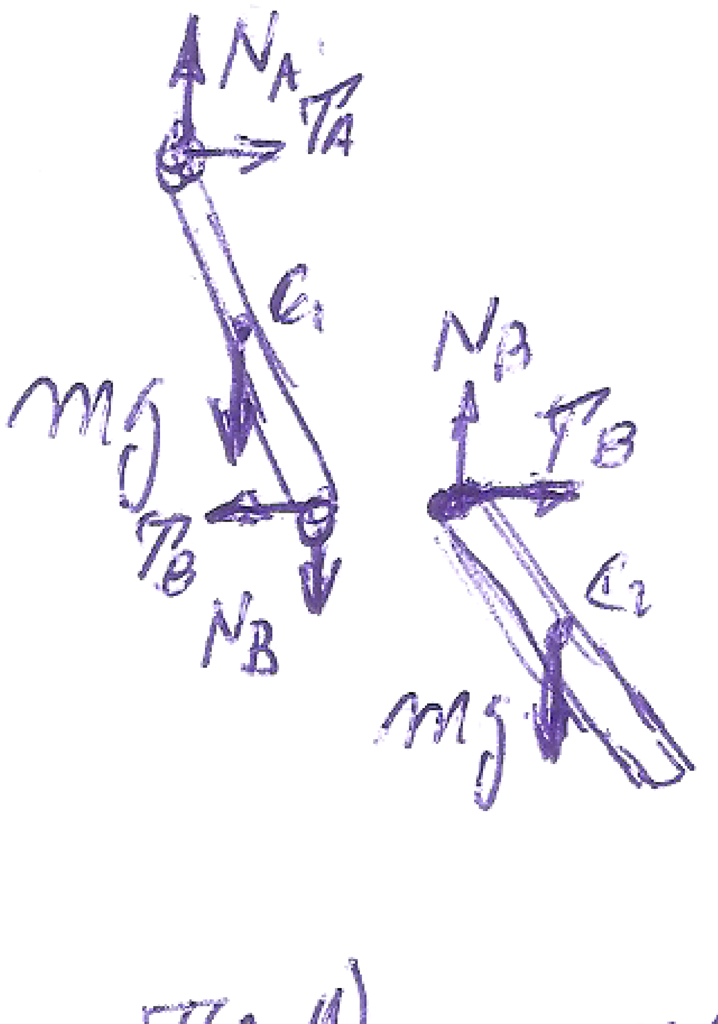
<u>Sistema de pêndulos</u>



duas barras homogêneas de massa "m" e comprimento "ℓ", oscilando c/ pequenas amplitudes em torno do equ.
→ 2 reservatórios de energia cinética e 2 de potencial

$\alpha(t)$ e $\beta(t)$ → configuração geral do sistema

$\alpha = \beta = 0$ no equilíbrio. Isolando os corpos (separando do resto do universo) e colocando as forças que o "universo" faz sobre os corpos)



$$TMB_1 \begin{cases} N_A = N_B + mg & \text{pois a aceleração vertical de } C_1 \sim 0 \\ T_A - T_B = m \frac{\ell}{2} \ddot{\alpha} & \leftarrow \text{aceleração absoluta horiz. do centro de massa} \end{cases}$$

$$TMB_2 \begin{cases} N_B = mg \\ T_B = m \cdot \left(\ell \cdot \ddot{\alpha} + \frac{\ell}{2} \cdot \ddot{\beta}\right) \end{cases}$$

aceleração horizontal absoluta do centro de massa da barra 2

$$TMA_{A_1} \Rightarrow \frac{m\ell^2}{3}\ddot{\alpha} = -mg\frac{\ell}{2}\underbrace{\operatorname{sen}\alpha}_{\alpha} - T_B \ell \underbrace{\cos\alpha}_{1} - N_B \ell \alpha$$

$$\frac{m\ell^2}{3}\ddot{\alpha} + m\left(\ell^2\ddot{\alpha} + \frac{\ell^2}{2}\ddot{\beta}\right) + mg\frac{\ell}{2}\alpha + mg\ell\alpha = 0$$

$$TMA)_{B_2} \quad \frac{m\ell^2}{3}\ddot{\beta} = -mg\frac{\ell}{2}\beta - \frac{m\ell}{2}\cdot\ell\ddot{\alpha} \quad \left(\ddot{\vec{a}} \wedge m\vec{e}_c\right) \text{ acel. polo}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\alpha} + \frac{m\ell^2}{2}\ddot{\beta} + 3mg\frac{\ell}{2}\alpha = 0 \\ \frac{m\ell^2}{2}\ddot{\alpha} + \frac{m\ell^2}{3}\ddot{\beta} + mg\frac{\ell}{2}\beta = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \frac{4}{3}\ddot{\alpha} + \frac{1}{2}\ddot{\beta} + \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\alpha = 0 \\ \frac{1}{2}\ddot{\alpha} + \frac{1}{3}\ddot{\beta} + \frac{1}{2}\frac{g}{\ell}\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad \text{derivando e substituindo vem:}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}\frac{g}{\ell} - \frac{4}{3}\omega^2 & -\frac{\omega^2}{2} \\ -\frac{\omega^2}{2} & \frac{1}{2}\frac{g}{\ell} - \frac{\omega^2}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{solução} \neq \text{trivial}$$

$$\left(\frac{3}{2}\frac{g}{\ell} - \frac{4}{3}\omega^2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{g}{\ell} - \frac{\omega^2}{3}\right) - \frac{\omega^4}{4} = 0$$

$$\frac{4}{9}\omega^4 - \frac{\omega^4}{4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)\frac{g}{\ell}\cdot\omega^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{g}{\ell}\right)^2 = 0$$

$$\frac{7\omega^4}{36} - \frac{7}{6}\left(\frac{g}{\ell}\right)\cdot\omega^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{g}{\ell}\right)^2 = 0 \quad \therefore \quad \omega^4 - 6\left(\frac{g}{\ell}\right)\cdot\omega^2 + \frac{27}{7}\left(\frac{g}{\ell}\right)^2 = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = 3\frac{g}{\ell} \mp \sqrt{9\left(\frac{g}{\ell}\right)^2 - \frac{27}{7}\left(\frac{g}{\ell}\right)^2} = (3 \mp 2{,}268)\left(\frac{g}{\ell}\right) = \begin{matrix} 0{,}732\,g/\ell \\ 5{,}268\,g/\ell \end{matrix}$$

$$p/\ \omega^2 = \omega_1^2 = 0{,}732\,\frac{g}{\ell}$$

linear/ dependentes

$$\begin{bmatrix} 1{,}5\frac{g}{\ell} - 0{,}976\frac{g}{\ell} & -0{,}366\frac{g}{\ell} \\ -0{,}366\frac{g}{\ell} & 0{,}5\frac{g}{\ell} - 0{,}244\frac{g}{\ell} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore \boxed{A_{21} = A_{11}\cdot 1{,}43} \text{ fase}$$

$$p/\ \omega^2 = \omega_2^2 = 5{,}268\,g/\ell$$

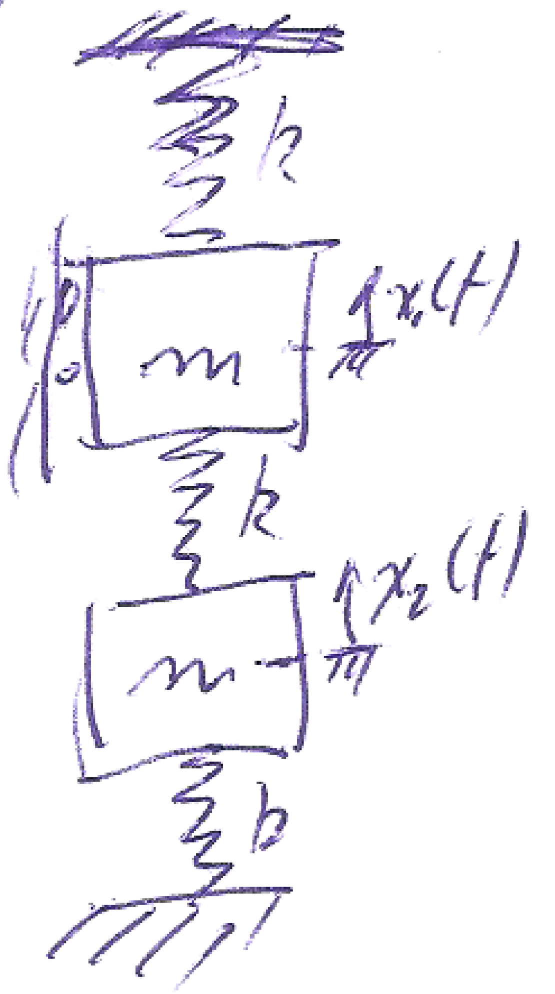
$$\begin{bmatrix} 1{,}5 - 7{,}024 & -2{,}634 \\ -2{,}634 & 0{,}5 - 1{,}756 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore \boxed{A_{22} = -\cancel{3{,}43}\ 2{,}10\, A_{12}} \text{ oposição de fase}$$

Solução geral

$$\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}43 \end{pmatrix} A_{11}\operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi_1) + \begin{pmatrix} 1 \\ -2{,}10 \end{pmatrix} A_{21}\operatorname{sen}(\omega_2 t + \phi_2) \quad \text{com} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{0{,}732g}{\ell}},\ \omega_2 = \sqrt{\frac{5{,}268g}{\ell}}$$

Desacoplamento das equações diferenciais e Coordenadas Principais

Já vimos que as duas equações diferenciais geralmente aparecem acopladas. Se houvéssemos escolhido outras coordenadas ao invés das que escolhemos será que poderíamos simplificar o equacionamento?



$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 & (1) \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Se houvéssemos escolhido $\left\{\begin{matrix} y_1(t) = x_1(t) + x_2(t) \text{ e} \\ y_2(t) = x_1(t) - x_2(t) \end{matrix}\right)$ (3) como ficariam as equações diferenciais?

Somando membro a membro as equações (1) e (2) obteríamos

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + kx_1 + kx_2 = 0 \therefore \boxed{m\ddot{y}_1(t) + ky_1(t) = 0}$$

Subtraindo (2) de (1), membro a membro obtemos:

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 3kx_1 - 3kx_2 = 0 \therefore \boxed{m\ddot{y}_2(t) + 3ky_2(t) = 0}$$

e o sistema de equações diferenciais nas coordenadas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ teria ficado:

$$\left.\begin{matrix} m\ddot{y}_1(t) + ky_1(t) = 0 \\ m\ddot{y}_2(t) + 3ky_2(t) = 0 \end{matrix}\right\} \text{desacopladas} \quad \begin{matrix} \omega_1^2 = k/m \\ \omega_2^2 = 3k/m \end{matrix}$$

$$y_1(t) = A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi_1) \quad \text{e} \quad y_2(t) = A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \phi_2)$$

Somando membro a membro as equações (3) obteríamos $x_1(t) = \dfrac{y_1(t) + y_2(t)}{2}$

subtraindo $x_2(t) = \dfrac{y_1(t) - y_2(t)}{2}$ e a solução em x_1 e x_2

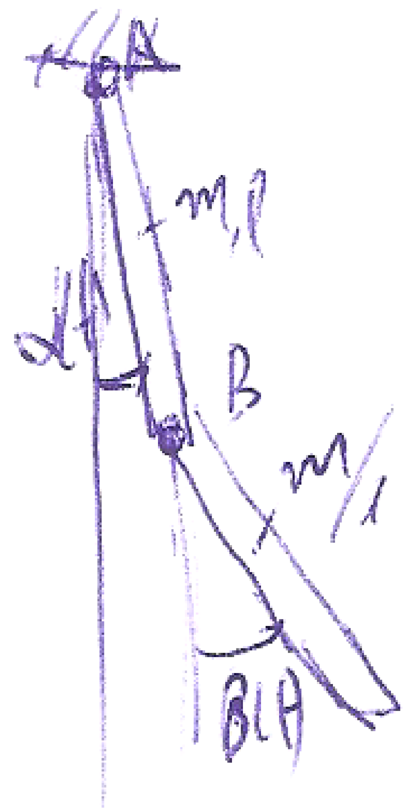
seria:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} y_1(t) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} y_2(t) = \frac{A_1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi_1) + \frac{A_2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(\omega_2 t + \phi_2)$$

Sempre existe uma combinação linear das variáveis escolhidas para representar a evolução de um sistema linear (não amortecido) no tempo, que desacoplam as equações diferenciais. O problema é que (no geral) precisamos resolver o sistema de equações acopladas para escolher as coordenadas que desacoplam as equações.

No caso do sistema em pauta, como havíamos encontrado os dois modos fundamentais de vibrar $x_{11}(t) = x_{21}(t)$ e $x_{12}(t) = -x_{22}(t)$, bastou escolher um $y_2(t)$ que se mantivesse nulo quando o sistema físico estivesse vibrando no 1º modo e um $y_1(t)$ que se mantivesse nulo quando o sistema estivesse vibrando no segundo modo para definirmos as variáveis que desacoplavam as equações diferenciais.

No caso dos pêndulos



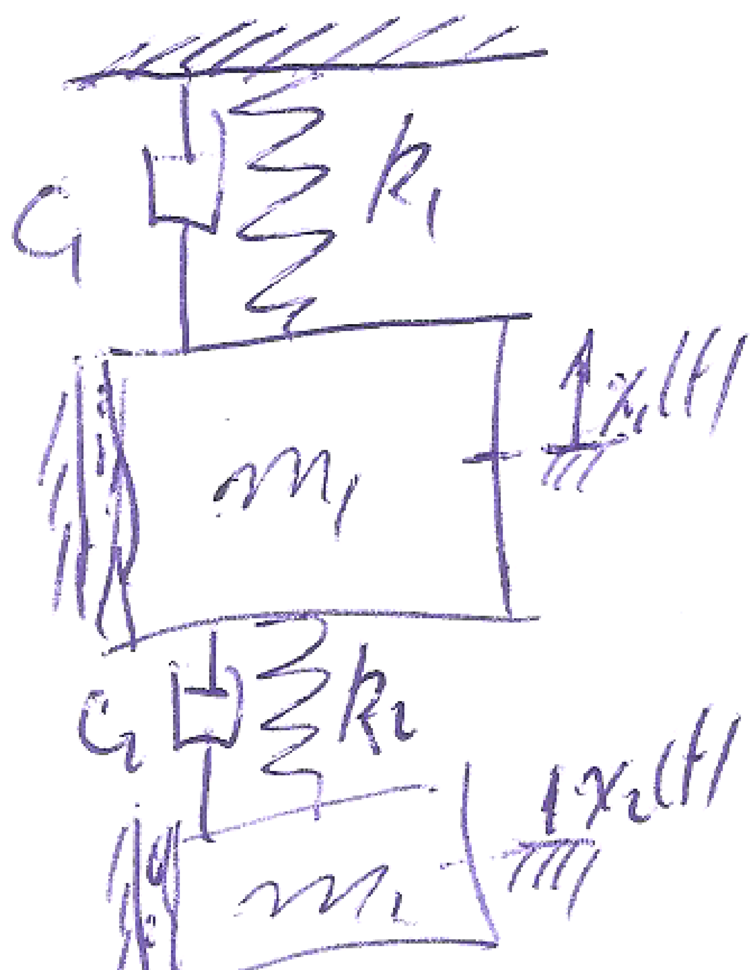
1º modo $\begin{cases} \beta_1(t) = \alpha_1(t)\cdot 1{,}43 \\ \omega_1 = \sqrt{\dfrac{0{,}732g}{\ell}} = 0{,}856\sqrt{g/\ell} \end{cases}$

2º modo $\begin{cases} \beta_2(t) = -2{,}1\cdot\alpha_2(t) \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{5{,}268g}{\ell}} = 2{,}295\sqrt{g/\ell} \end{cases}$

Se houvéssemos escolhido como variáveis γ_1 e γ_2 tais que $\begin{cases} \gamma_1(t) = 2{,}1\alpha(t) + \beta(t) \\ \gamma_2(t) = 1{,}43\alpha(t) - \beta(t) \end{cases}$

as equ. diferenciais sairiam desacopladas.

Vibrações ~~livres~~, amortecidas em sistemas c/ 2 graus de liberdade



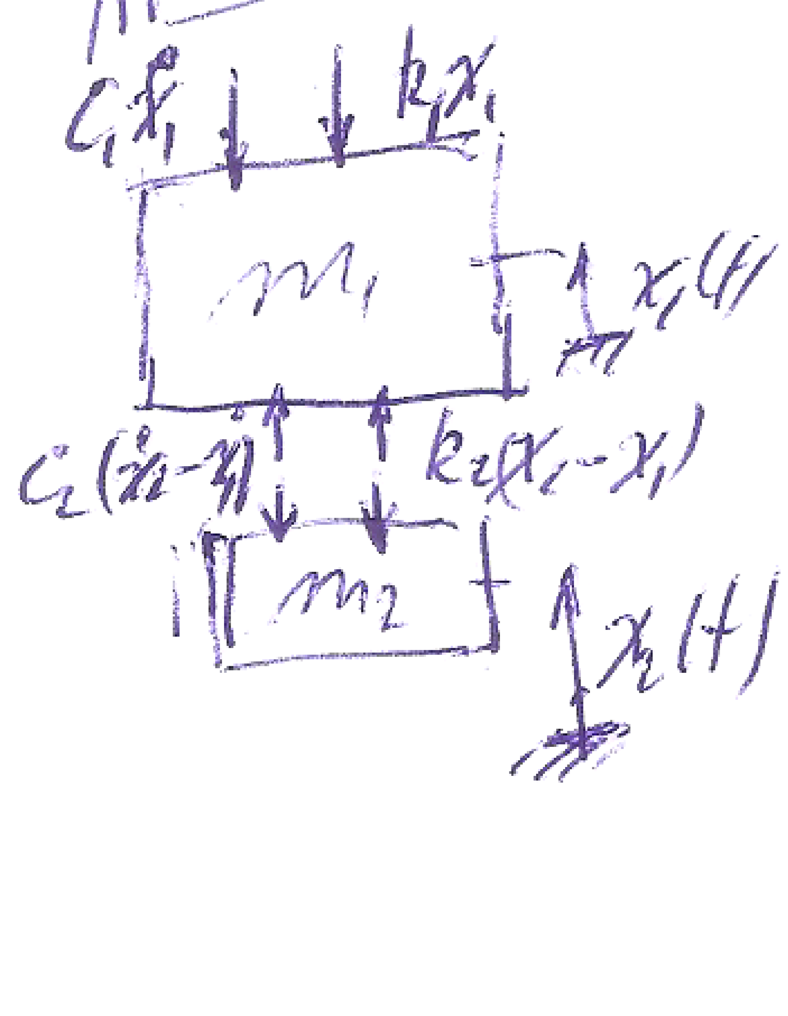
2 reservatórios de energia cinética independentes

2 reservatórios de energia potencial independentes (a rigor 4 pois as molas, que estão acopladas)

amortecimento viscoso (linear)

variáveis $x_1(t)$ e $x_2(t)$ – zero na configuração de equilíbrio, parecem bastante adequadas para representar a configuração geral do sistema.

Isolando os corpos na configuração genérica e aplicando TMB



$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1(t) = -k_1x_1(t) - c_1\dot{x}_1(t) + k_2(x_2-x_1) + c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1) \\ m_2\ddot{x}_2(t) = -k_2(x_2-x_1) - c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1(t) + (c_1+c_2)\dot{x}_1(t) - c_2\dot{x}_2(t) + (k_1+k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2(t) - c_2\dot{x}_1(t) + c_2\dot{x}_2(t) - k_2 x_1(t) + k_2 x_2(t) = 0 \end{cases}$$

sistema acoplado tanto por forças elásticas como viscosas.
Como temos amortecimento, os termos em derivada 1ª não indicam a busca de soluções harmônicas, e sim exponenciais.
Portanto, busquemos $\begin{cases} x_1(t) = A_1 e^{st} \\ x_2(t) = A_2 e^{st} \end{cases}$ ou $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{st}$

~~Matricialmente~~ Na forma matricial nosso sistema seria:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\text{matriz de massas}} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}}_{\text{matriz de amortecimento}} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\text{matriz de rigidez}} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$

Escrevendo as variáveis e substituindo obteríamos:

$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + (c_1+c_2)s + k_1+k_2 & -(c_2 s + k_2) \\ -(c_2 s + k_2) & m_2 s^2 + c_2 s + k_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{st} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Problema de autovalores e autovetores

Como e^{st} não é nulo e tampouco nos interessa a ~~solução trivial~~ $(A_1 = A_2 = 0)$ impomos que o determinante da matriz dos coef. seja $= 0$

$$[m_1 s^2 + (c_1+c_2)s + k_1 + k_2]\cdot[m_2 s^2 + c_2 s + k_2] - (c_2 s + k_2)^2 = 0$$ equação característica

$$m_1 m_2 s^4 + [m_1 c_2 + m_2(c_1+c_2)]s^3 + [m_1 k_2 + m_2(k_1+k_2) + (c_1+c_2)\cdot c_2 - \cancel{c_2^2}]s^2 + [(c_1+c_2)\cdot k_2 + (k_1+k_2)\cdot c_2 - 2c_2 k_2]s + (k_1+k_2)\cdot k_2 - \cancel{k_2^2} = 0 \quad \therefore$$

$$m_1 m_2 s^4 + [m_1 c_2 + m_2(c_1+c_2)]s^3 + [m_1 k_2 + m_2(k_1+k_2) + c_1 c_2]s^2 + [c_1 k_2 + c_2 k_1]s + k_1 k_2 = 0$$

Equ. de 4º grau em s com todos os coeficientes positivos, implicando na impossibilidade de alguma raiz com parte real positiva (física/o sistema é amortecido e as amplitudes devem ir para zero quando o tempo cresce $Re(s) < 0$
No geral raízes são complexas.

~~Obs~~: Soluções possíveis para a equação característica.
- 4 raízes reais negativas (superamortecido)
- 2 raízes reais negativas e um par de raízes complexas conjugadas, com parte real negativa
- 2 pares de raízes complexas conjugadas, com partes reais negativas. (subamortecido)

Para facilitar a álgebra digamos que: $m_2 = m$; $m_1 = 4m$; $k_2 = k$; $k_1 = 3k$; $c_2 = c$ e $c_1 = \alpha c$, onde discutiremos possíveis valores para $\boxed{\alpha}$. Neste caso, o sistema de equações diferenciais fica:

$$m\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{pmatrix} + c\begin{bmatrix} 1+\alpha & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} + k\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se c for igual a zero, caímos no sistema não amortecido e portanto buscamos soluções do tipo $\begin{cases} x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \phi) \\ x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$

poderíamos resolver também via exponencial
$x_1(t) = A_1 e^{st}$
$x_2(t) = A_2 e^{st}$

$$\left\{-m\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\omega^2 + k\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right\}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}\sin(\omega t + \phi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore$$

$$\begin{bmatrix} 4(k - m\omega^2) & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore \begin{vmatrix} 4(k - m\omega^2) & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$4(k - m\omega^2)^2 - k^2 = 0 \therefore 2(k - m\omega^2) = \pm k \therefore \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{k}{2m} \\ \omega_2^2 = \frac{3k}{2m} \end{cases}$$

Para $\omega^2 = \omega_1^2 = k/2m$ obtemos:

$$\begin{bmatrix} 4(k - \frac{k}{2}) & -k \\ -k & k/2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{A_{21} = 2A_{11}} \text{ e } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

movimento em fase e $x_{21}(t) = 2x_{11}(t)$

Para $\omega^2 = \omega_2^2 = \dfrac{3k}{2m}$

$$\begin{bmatrix} 4(k - \frac{3k}{2}) & -k \\ -k & -\frac{k}{2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore \boxed{A_{22} = -2A_{12}} \text{ e } \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$$

oposição de fase $x_{22}(t) = -2x_{12}(t)$

Com $c \neq 0$, caímos somente na possível solução em e^{st}

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{st}$$

Neste caso ficamos com:

$$\begin{bmatrix} 4\left(s^2+\frac{(1+\alpha)\cdot c}{4m}s+\frac{k}{m}\right) & -\left(\frac{c}{m}s+\frac{k}{m}\right) \\ -\left(\frac{c}{m}s+\frac{k}{m}\right) & s^2+\frac{c}{m}s+\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{st} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se $\alpha = 3$, a matriz de amortecimento fica proporcional à matriz de rigidez (mola k, amortecimento c e mola $3k$, amortecimento $3c$) o que facilita muito a ~~...~~ obtenção da solução.

Det da matriz de coeficientes $= 0$ para fugir da solução trivial

fornece $4\left(s^2+\frac{c}{m}s+\frac{k}{m}\right)\left(s^2+\frac{c}{m}s+\frac{k}{m}\right)-\left(\frac{c}{m}s+\frac{k}{m}\right)^2=0$

$$4\left(s^2+\frac{c}{m}s+\frac{k}{m}\right)^2=\left(\frac{c}{m}s+\frac{k}{m}\right)^2 \therefore \begin{cases} 2\left(s_1^2+\frac{c}{m}s_1+\frac{k}{m}\right)=\frac{c}{m}s_1+\frac{k}{m} \\ 2\left(s_2^2+\frac{c}{m}s_2+\frac{k}{m}\right)=-\left(\frac{c}{m}s_2+\frac{k}{m}\right) \end{cases}$$

Portanto $2s_1^2+\frac{c}{m}s_1+\frac{k}{m}=0$ e $2s_2^2+\frac{3c}{m}s_2+\frac{3k}{m}=0$

Vale observar que quando resolvemos vibrações livres amortecidas com 1 grau de liberdade, chegamos a uma equação diferencial do tipo $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$, buscamos soluções do tipo $x(t)=Ae^{st}$ e obtivemos exatamente o mesmo tipo de equação característica $(ms^2+cs+k)\cdot Ae^{st}=0 \therefore ms^2+cs+k=0$ e $s_{1,2}=\frac{-c}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}$ ou ainda, para $\zeta=\frac{c}{c_c}=\frac{c}{2\sqrt{km}}$ e $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ $s_{1,2}=-\zeta\omega\pm\sqrt{(\zeta^2-1)}\,\omega$

Exatamente o mesmo tipo de solução é esperada nesta condição de amortecimento proporcional à rigidez (ou às massas!)

Retornando com as raízes s_1 e s_2 nas equações de amplitude para verificarmos os modos de vibrar.

Para $s=s_1$

$$\begin{bmatrix} \underbrace{4\left(s_1^2+\frac{c}{m}s_1+\frac{k}{m}\right)}_{=2\left(s_1^2+\frac{c}{2m}s_1+\frac{k}{m}\right)} & -\left(\frac{c}{m}s_1+\frac{k}{m}\right) \\ -\left(\frac{c}{m}s_1+\frac{k}{m}\right) & s^2+\frac{c}{m}s+\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore \begin{bmatrix} 2\left(\frac{c}{m}s_1+\frac{k}{m}\right) & -\left(\frac{c}{m}s_1+\frac{k}{m}\right) \\ -\left(\frac{c}{m}s_1+\frac{k}{m}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{c}{m}s_1+\frac{k}{m}\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Portanto $\boxed{A_{21}=2A_{11}}$ e o modo fica idêntico ao do não amortecido.

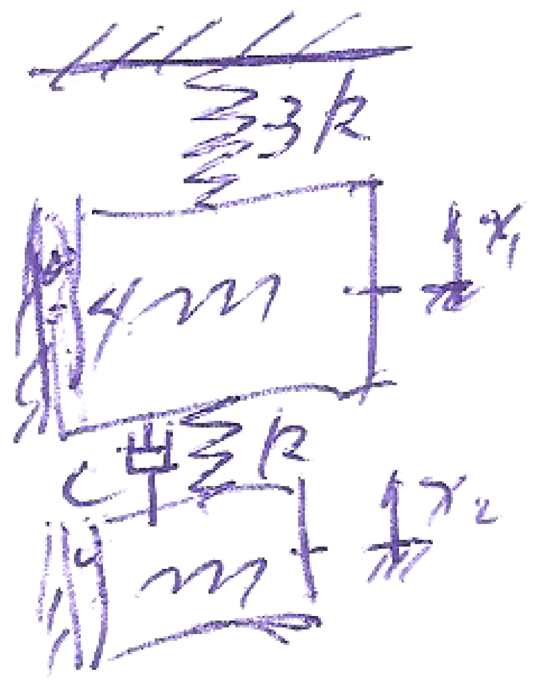
Para $s = s_2$ a solução fica:

$$\begin{bmatrix} 4\left(s_2^2+\frac{c}{m}s_2+\frac{k}{m}\right) & -\left(\frac{c}{m}s_2+\frac{k}{m}\right) \\ -\left(\frac{c}{m}s_2+\frac{k}{m}\right) & s_2^2+\frac{c}{m}s_2+k/m \end{bmatrix}\begin{pmatrix}A_{12}\\ A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \text{ ou}$$

$$\begin{bmatrix} -2\left(\frac{c}{m}s_2+\frac{k}{m}\right) & -\left(\frac{c}{m}s_2+k/m\right) \\ -\left(\frac{c}{m}s_2+k/m\right) & -2\left(\frac{c}{m}s_2+k/m\right) \end{bmatrix}\begin{pmatrix}A_{12}\\ A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \therefore \boxed{A_{22}=-2A_{12}}$$

Veremos mais tarde que ~~quando~~ sempre que a matriz de amortecimento for proporcional às matrizes de massa e rigidez, portanto $[C] = p[M] + q[K]$, os modos de vibrar do sistema amortecido são idênticos ao do sistema não amortecido.

Retomando nossa discussão. Digamos que $\alpha = 0$, ou seja só tínhamos amortecedor entre as massas



$$m\begin{bmatrix}4&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\ddot x_1\\ \ddot x_2\end{pmatrix} + c\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{pmatrix} + k\begin{bmatrix}4&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{Bmatrix} = \begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix} e^{st}$$

Equação de amplitudes fica

$$\begin{bmatrix} 4\left(s^2+\frac{c}{4m}s+\frac{k}{m}\right) & -\left(\frac{c}{m}s+\frac{k}{m}\right) \\ -\left(\frac{c}{m}s+\frac{k}{m}\right) & \left(s^2+\frac{c}{m}s+\frac{k}{m}\right) \end{bmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

A equação característica fica:

$$4\left(s^2+\frac{c}{4m}s+\frac{k}{m}\right)\left(s^2+\frac{c}{m}s+\frac{k}{m}\right)-\left(\frac{c}{m}s+\frac{k}{m}\right)^2=0$$

Digamos que resolvemos a equação de 4º grau em s e achamos um par de raízes complexas conjugadas

$\begin{cases} s_1 = -\alpha\omega+\omega i \\ s_2 = -\alpha\omega-\omega i \end{cases}$ Ao substituirmos cada uma das raízes nas equações de amplitude, digamos na 1ª obtivemos

$$(A+Bi)\cdot A_1 = (C+Di)\cdot A_2 \quad \text{para } s_1$$

$$(A-Bi)\cdot A_1 = (C-Di)\cdot A_2 \quad \text{para } s_2$$

Portanto, para s_1 obtemos

$$A_{21} = A_{11}\frac{A+Bi}{C+Di}\cdot\frac{C-Di}{C-Di} = A_{11}\cdot\frac{AC+BD+(BC-AD)i}{C^2+D^2} = A_{11}(p+qi) = A_{11}\cdot\rho\cdot e^{i\phi}$$

para $s_2 \Rightarrow A_{22} = A_{12}\frac{A-Bi}{C-Di}\cdot\frac{C+Di}{C+Di} = A_{12}\cdot\frac{AC+BD-(BC-AD)i}{C^2+D^2} = A_{12}(p-qi) = A_{12}\rho e^{-i\phi}$

Observa-se que obtemos exatamente a mesma relação entre as amplitudes, mas o valor é um número complexo, implicando em uma relação de amplitudes, "ρ", e também em uma fase, "$\pm\phi$".

para s_1 $\begin{cases} x_{11}(t) = A_{11}e^{s_1 t} = A_{11}e^{-\alpha\omega t}\cdot e^{i\omega t} \\ x_{21}(t) = A_{21}e^{s_1 t} = A_{11}\cdot\rho\cdot e^{i\phi}\cdot e^{-\alpha\omega t}\cdot e^{i\omega t} = \rho\cdot A_{11}\cdot e^{-\alpha\omega t}\cdot e^{i(\omega t+\phi)} \end{cases}$

para s_2 $\begin{cases} x_{12}(t) = A_{12}e^{s_2 t} = A_{12}\cdot e^{-\alpha\omega t}\cdot e^{-i\omega t} \\ x_{22}(t) = A_{22}e^{s_2 t} = A_{12}\cdot\rho\cdot e^{-i\phi}\cdot e^{-\alpha\omega t}\cdot e^{-i\omega t} = \rho A_{12}\cdot e^{-\alpha\omega t}\cdot e^{-i(\omega t+\phi)} \end{cases}$

Como a soma de soluções do sistema de equações diferenciais lineares também é solução, podemos escrever:

$$x_1(t) = x_{11}(t) + x_{12}(t) = A_{11}e^{-\alpha\omega t}\cdot e^{i\omega t} + A_{12}e^{-\alpha\omega t}\cdot e^{-i\omega t} = A_{11}e^{-\alpha\omega t}\cdot[\cos(\omega t) + i\,\mathrm{sen}(\omega t)] +$$

$$+ A_{12}\cdot e^{-\alpha\omega t}[\cos(\omega t) - i\,\mathrm{sen}(\omega t)] = e^{-\alpha\omega t}\cdot[\underbrace{(A_{11}+A_{12})}_{Re=A}\cos(\omega t) + \underbrace{(A_{11}-A_{12})\cdot i}_{Re=B}\cdot\mathrm{sen}(\omega t)]$$

Como nos interessam soluções reais, A_{11} e A_{12} são complexos conjugados e A e B constantes reais a serem determinadas pelas Cond. Inic.

Simultaneamente,

$$x_2(t) = x_{21}(t) + x_{22}(t) = \rho A_{11}\cdot e^{-\alpha\omega t}\cdot e^{i(\omega t+\phi)} + \rho A_{12}\cdot e^{-\alpha\omega t}\cdot e^{-i(\omega t+\phi)} = \rho\cdot e^{-\alpha\omega t}\cdot\{[\cos(\omega t+\phi)\cdot A_{11} +$$

$$+ A_{11}\cdot i\,\mathrm{sen}(\omega t+\phi)] + A_{12}\cdot[\cos(\omega t+\phi) - i\,\mathrm{sen}(\omega t+\phi)]\} =$$

$$= \rho\cdot e^{-\alpha\omega t}\cdot[\underbrace{(A_{11}+A_{12})}_{Re=A}\cos(\omega t+\phi) + \underbrace{(A_{11}-A_{12})\,i}_{Re=B}\,\mathrm{sen}(\omega t+\phi)]$$

Observa-se portanto a relação complexa no modo de vibrar do sistema correspondente ao par de raízes complexas conjugadas. Apesar do decaimento ser o mesmo para as duas massas os picos das amplitudes ficam deslocados no tempo de $\frac{\phi}{\omega}$.

Para baixos valores de amortecimento, um balanço físico de energia acumulada no sistema e dissipada nos amortecedores, (assumindo que os modos não amortecidos sejam representativos da realidade) possibilita estimar os amortecimentos modais.